Tout commence avec James Clerck Maxwell et Oliver Heaviside

En 1873, le mathématicien et physicien James Clerk Maxwell publie, après 10 ans de travail, un traité intitulé "A Treatise on Electricity and Magnetism" destiné à harmoniser les connaissances de l'époque sur l'électricité et le magnétisme. Il y écrit un système de 20 équations à 20 inconnues dont le but est de décrire les propriétés d'un champ électromagnétique. Mais c'est un physicien (autodidacte), Oliver Heaviside, qui simplifie ce système (relativement inutilisable à l'époque) en un système de 4 équations qui permettent de calculer (et donc d'anticiper) les phénomènes électromagnétiques. C'est quatre équations sont restées célèbres non pas sous le nom d'équations d'Heaviside, mais d'équations de Maxwell.

Les voici. En ce qui me concerne, c'est juste pour la beauté de leur écriture, car je ne comprends pas ce qu'elles représentent physiquement. Je laisse à Maître Bernard le soin de nous initier à l'aspect concret de ces jolis objets mathématiques.

Avec les notations suivantes:

- $\rho(\vec{r}, t)$ la densité volumique de charge électrique au point $\vec{r}$ à l'instant *t*.
- $\vec{j}(\vec{r}, t)$ le vecteur densité de courant.
- $\vec{E}(\vec{r}, t)$ le vecteur champ électrique.
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$ le pseudo-vecteur induction magnétique.
- ε_0 la permittivité diélectrique du vide $\approx 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^{-3}{\cdot}A^{2}{\cdot}s^{4}}$
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide $= 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}A^{-2}{\cdot}s^{-2}}$, ou encore $4\pi\times10^{-7}$ T m/A

Les équations de Maxwell sont:

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

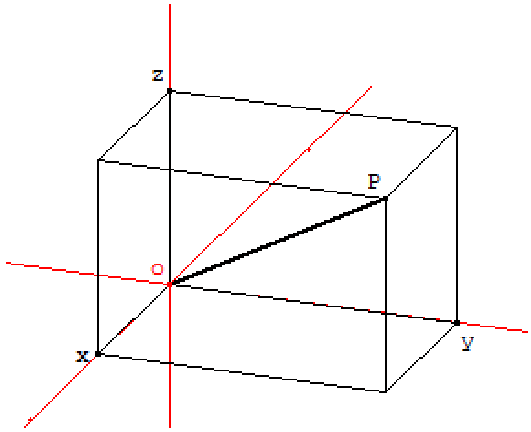
$$div\,\vec{B} = \overrightarrow{\nabla.B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Mais laissons là ces curiosités pour revenir à des choses plus compréhensibles…

Jusqu'à Henri Poincaré, les physiciens travaillaient dans l'espace que nous pratiquons depuis au quotidien à l'école:



L'espace dans lequel nous travaillons jusqu'au bac est l'espace à trois dimensions, affecté d'une géométrie dite "Euclidienne". C'est celui dans lequel Newton a défini les règles de la mécanique dite "classique".

Appelons-le $\mathcal{E}$

Pour repérer un point P dans cet espace $\mathcal{E}$, on utilise:

- un repère cartésien composé d'un point (l'origine) et de trois axes distincts passant par ce point (axe des abscisses, axe des ordonnées et axe des cotes)
- un triplet de nombres réels (*x; y; z*), appelé "coordonnées" de P dans le ce repère.

Pour mesurer la distance entre deux points O et P de $\mathcal{E}$, construisons un repère cartésien un peu particulier (on dit orthonormé):

- origine: O
- les axes sont deux à deux perpendiculaires
- les unités sur chaque axe sont les mêmes et égales à 1

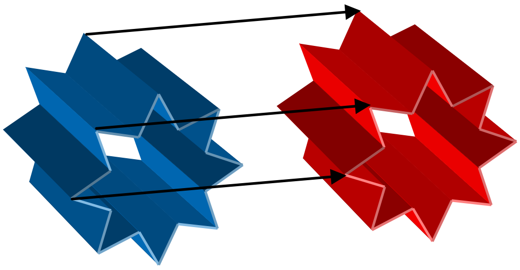
On appelle alors distance OP, le nombre positif d, image de P(*x*; *y*; *z*) par la transformation:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longmapsto & \mathbb{R}+ \\ \boldsymbol{P(x;y;z)} & \longmapsto & \mathbf{d} = \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+z^2}} \end{array}$$

Quelques remarques:

- *on a alors* $\mathrm{d}^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- *plus P est loin de O, plus d est grand.*
- ***L'ensemble des antécédents d'un réel positif a donné est la sphère de rayon*** $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ **.**

Cette distance confère à $\mathcal{E}$ une structure dans laquelle il existe des transformations qui n'altèrent en rien les propriétés géométriques des figures. Ce sont des isométries.



<u>Par exemple</u>: la translation (qui consiste à déplacer tous les points d'un espace donné dans la même direction sur une même distance) (voir le dessin) n'altère en rien la forme des figures qui se trouvent dans cet espace.

(Nous connaissons également les symétries, les rotations et l'on pourrait s'amuser à composer ces transformations pour voir ce qu'elles donnent. Elle forme ce qu'Evariste Galois a appelé un groupe mais ce serait un autre sujet …)

Eh bien voilà! En 1905, Henri Poincaré a eu une idée géniale: (en maths, mais peu exploitable en physique)

Rechercher un groupe de transformations qui n'altèrent en rien, non pas les propriétés géométriques des figures, mais … les Équations de Maxwell.

N'ayons peur de rien, suivons Poincaré dans sa démarche vers la dimension 4 … :

Pourquoi Henri Poincaré se pose-t-il ce problème?

Supposons que la Terre soit immobile dans l'espace et que l'on y écrive les équations de Maxwell.

Puis, considérons un point P de l'axe (Ox) de coordonnées (x; y; z) .

Et maintenant supposons que la Terre se déplace à la vitesse constante v vers ce point P.

Au temps t, le point P a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{pmatrix}$ (il part du principe newtonien que le temps est absolu, où et dans quelque condition que l'on soit)

Poincaré remarque que si l'on remplace ($x; y; z$) par ($x'; y' ; z'$) dans les équations de Maxwell, c'est-à-dire que l'on fait la transformation qui à ($x; y; z$) associe ($x'; y' ; z'$), **les équations de Maxwell changent de forme!** Autrement dit, elles ne sont pas "invariantes" par cette transformation.

Cela voudrait dire que ces équations sont sensibles à la vitesse de déplacement de la Terre dans l'espace, et donc que l'on peut calculer cette vitesse. Or le même Henri Poincaré avait énoncé en 1902 qu'une telle mesure était impossible…

Pensant que, ni les équations de Maxwell, ni cette affirmation n'étaient à remettre en cause, Poincaré rechercha donc une autre transformation qui laisse invariante les équations de Maxwell.

Ayant également l'intuition qu'il existerait une vitesse limite, infranchissable, environ égale à celle de la lumière, l'orientation de ses recherches le fit "retomber" sur une transformation que Lorentz avait utilisée avant lui pour d'autres travaux qui n'avaient pas totalement abouti, mais **une transformation qui ne considère pas le temps comme absolu**. *(C'est Henri Poincaré qui, modeste, baptisera cette transformation, la "transformation de Lorentz")*

Cette transformation est celle qui à ($x; y; z; t$) associe ($x'; y' ; z'; t'$) tel que:

$$\begin{pmatrix} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}(x - \dfrac{v}{c}t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}(t - \dfrac{v}{c}x) \end{pmatrix} \quad avec\ c\ la\ vitesse\ de\ la\ lumière\ dans\ le\ vide\ (\approx\ 299\,792\,458\ \mathrm{m/s})$$

Ecrite sous cette forme, elle est difficile à manipuler, mais si l'on pose $\beta = \dfrac{v}{c}$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, elle devient:

$$T_\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x) \end{pmatrix} \quad avec\ \beta\ qui\ devient\ une\ constante\ qui\ définit\ la\ transformation.$$

La dernière équation ($t' = \gamma(t - \beta x)$) est une vraie révolution car elle induit le fait, si on l'applique à la physique (*ce que fera Albert Einstein par une autre approche avec le succès que l'on connait*), que le temps varie selon l'endroit où l'on se trouve et la vitesse à laquelle on se déplace! C'est le fondement de la relativité …

Mais ce n'est pas tout!

Isaac Newton cherchait un moyen d'expliquer le monde. Il imagina un système qui s'appuyait sur un espace de dimension 3 munie d'une géométrie euclidienne et d'un temps absolu.

La vocation de l'espace de Poincaré est purement mathématique. t est une variable comme une autre. Il n'y a donc pas, à proprement parler, d'espace ni de temps, mais des êtres mathématiques définis par quatre variables. Il baptise donc cet espace: "espace quadridimensionnel" (Einstein l'appellera "Espace –Temps). Mais la structure de cet espace n'est pas déterminée par une géométrie (ni euclidienne, ni autre). Elle est déterminée par un groupe: celui construit à partir des transformations de Lorentz.

Pour ceux qui veulent aller plus loin:

<table>
<tr>
<td>

Qu'est-ce qu'un groupe?
C'est un ensemble E qui, muni d'une "opération" (appelons-la "composition" et notons-la "**.**"), possède les propriétés suivantes:

- La composée de deux éléments a et b de E est un élément de E (a **.** b ∈ E)
- La composée admet un élément neutre e
(pour tout a ∈ E a **.** e = e **.** a = a
- Tout élément a de E possède un symétrique b tel que
a **.** b = b **.** a = e

</td>
<td>

Vérification:
Soit T_β la transformation définie par $x' = \gamma(x - \beta t)$; $y'=y$; $z'=z$;
$t' = \gamma\ (t - \beta x)$ dont la constante a pour valeur β
et $T_{\beta'}$ celle dont la constante a pour valeur β' c'est-à-dire:
$x' = \gamma'(x - \beta' t)$; $y'=y$; $z'=z$; $t' = \gamma'(t - \beta' x)$
Vous pouvez vérifier que:

- la composée de ces deux transformations est une transformation de Lorentz de constante β" telle que
$\beta" = \frac{\beta+\beta'}{\sqrt{1+\beta\beta'}}$
- l'élément neutre est T_0
- et vous trouverez l'inverse de T_β tous seuls…

L'ensemble des transformations ainsi définies possède donc la structure algébrique qui fait de cet ensemble un groupe.

</td>
</tr>
</table>

On dit souvent que "**les mathématiciens inventent des mondes**" C'est tout de même un drôle d'espace que nous propose Poincaré… Mais c'est pourtant celui qui va suggérer à Einstein de construire sa théorie de la relativité.

<u>Remarque importante pour la suite</u> :

*Il serait maladroit de continuer à parler de **point séparés par une distance** dans cet espace que nous n'arrivons pas à "visualiser". Nous parlerons donc **d'événements séparés par un intervalle**. (Mais attention, le mot "intervalle" n'a pas, ici, le sens que vous lui connaissez habituellement)*

C'est assez logique puisque les coordonnées d'un "point" en dimension 4 font de ce "point" quelque chose qui est défini "ici" (trois cordonnées "spatiales") et "maintenant" (une coordonnée "temporelle").

Avec les "objets" mathématiques contenus dans cet espace (les équations de Maxwell par exemple), plus question de dessiner des figures…

Pour tenter de comprendre ce nouveau monde, revenons à cette "distance" devenue "intervalle".

Comment évaluer l'intervalle d (*c'est un nombre!*) entre deux événements O et P de cet espace?

1ère idée : si on reconduisait celle que l'on connait dans l'espace de dimension 3

On aurait alors $\boldsymbol{d^2 = OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$

N'oublions pas que Poincaré souhaitait que les transformations de Lorentz jouent, dans l'espace quadridimensionnel, le rôle des isométries dans l'espace à trois dimensions.

Si on applique une transformation de Lorentz aux événements O et P, il faudrait que l'on trouve:

$$d'^2 = d^2 \qquad \text{avec } x' = \gamma(x - \beta t)\ ;\ y'=y\ ;\ z'=z\ ;\ t' = \gamma(t - \beta x)$$

Or $d'^2 = x'^2+y'^2+z'^2+t'^2 = \gamma^2(x - \beta t)^2+y^2+z^2+ \gamma^2(t - \beta x)^2 = \gamma^2x^2+y^2+z^2+ \gamma^2t^2-4\gamma^2\beta xt+ \gamma^2\beta^2 (x^2+t^2) \neq d^2$

2ème idée : essayer une autre forme quadratique

Poincaré propose: $\boldsymbol{d^2 = OP^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$

Si on applique une transformation de Lorentz aux événements O et P, il faudrait que l'on trouve:

$$d'^2 = d^2 \qquad \text{avec } x' = \gamma(x - \beta t)\ ;\ y'=y\ ;\ z'=z\ ;\ t' = \gamma(t - \beta x)$$

Or $d'^2 = t'^2- x'^2-y'^2-z'^2 = \gamma^2(t - \beta x)^2 -\gamma^2(x - \beta t)^2-y^2-z^2 = \gamma^2t^2-\gamma^2x^2-y^2-z^2-2\gamma^2\beta xt+2\gamma^2\beta xt + \gamma^2\beta^2 (x^2-t^2)$

$$= \gamma^2(t^2-x^2)-y^2-z^2- \gamma^2\beta^2 (t^2-x^2)= \gamma^2(1-\beta^2)(t^2-x^2)-y^2-z^2$$

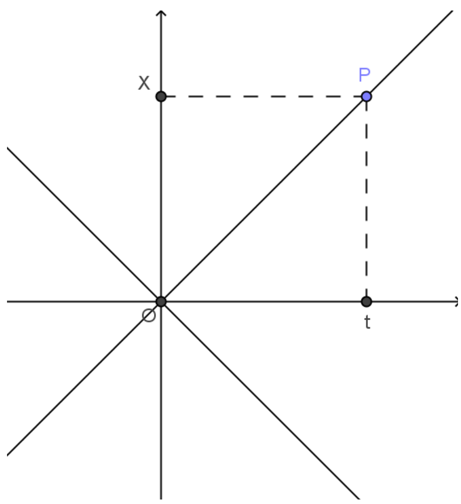
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)(t^2-x^2)-y^2-z^2 = d^2$$ **Donc c'est gagné !... pour ça…**

Essayons maintenant de comprendre ce qu'il se passe avec cette nouvelle notion d'intervalle entre deux événements.

Comme il n'est pas envisageable de représenter la situation en dimension 4, nous allons faire des représentations dans lesquelles les coordonnées seront t et $X = x^2 + y^2 + z^2$.

1er cas : si P est tel que X = t

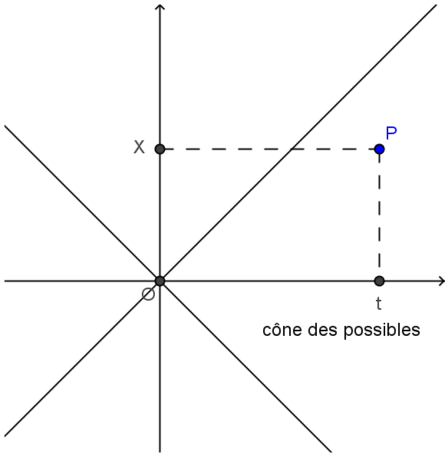
Alors $d^2 = 0$



Les événements O et P paraissent séparés sur la représentation. Pourtant l'intervalle qui les sépare est nul!...

Les physiciens disent que la droite (OP) décrit le trajet d'un rayon lumineux ou, plus précisément, d'un événement se propageant à la vitesse de la lumière (limite infranchissable). Ce qui veut dire que, dans l'espace quadridimensionnel, l'intervalle entre tous les événements se propageant à la vitesse de la lumière (ie tous les points d'un rayon lumineux) est nul.

2ème cas : si P est tel que X < t



Alors $d^2 > 0$

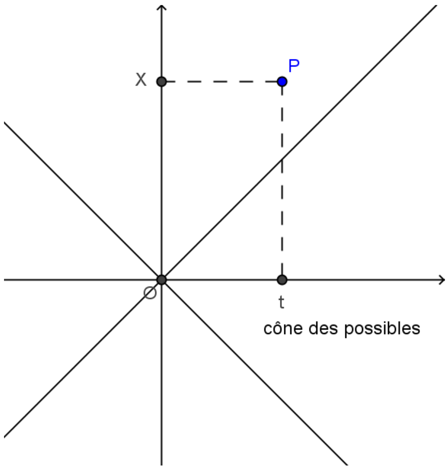
La mesure de l'intervalle est alors $d = \sqrt{d^2}$.

On dit que l'intervalle est **"du genre temps".**

On peut comprendre cette situation de la façon suivante:

Les deux événements O et P sont "proches" dans l'espace et "éloignés" dans le temps. Les événements peuvent alors être "reliés" par une relation de cause à effet. Le temps nécessaire pour qu'une information se propage de l'un à l'autre est suffisant, puisque sa vitesse peut être inférieure à c.

3ème cas : si P est tel que X > t



Alors $d^2 < 0$ … Là, ça se complique!

La mesure de l'intervalle est alors imaginaire (puisque le carré de l'intervalle est négatif).

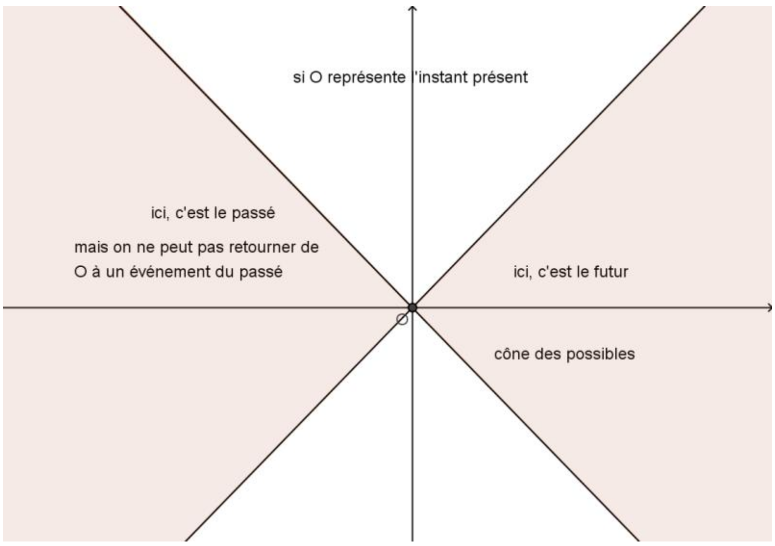
On préfère dire que l'intervalle est **"du genre espace"**.

Cela veut dire qu'une information se propageant à partir de O à la vitesse c ne pourra atteindre le point P dans le temps t . L'événement P est trop "éloigné" dans l'espace ou le temps pour y arriver est "trop court".

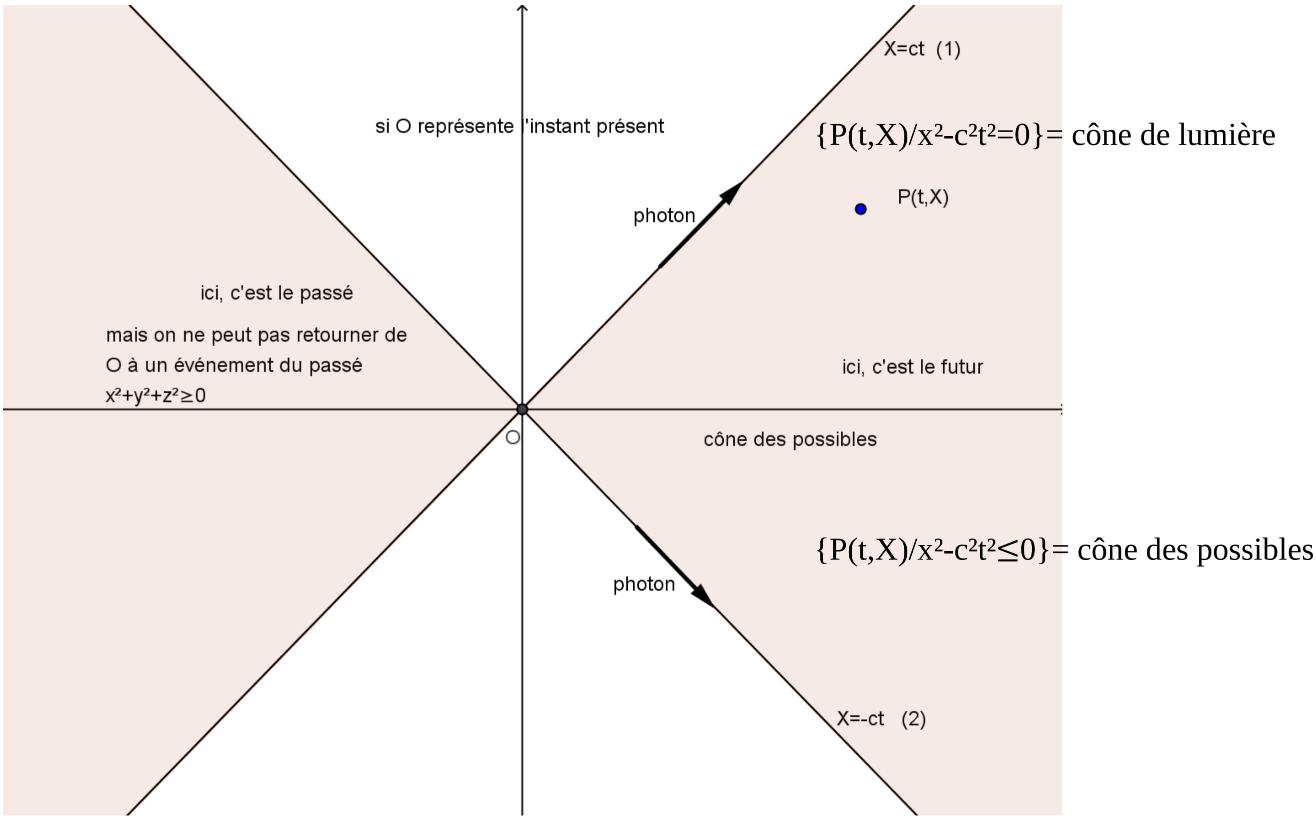
Les deux événements O et P ne peuvent pas être reliés par une relation de cause à effet.

Remarques :
Le pire c'est d'arriver à penser que cet espace quadridimensionnel décrit effectivement le monde réel (mieux en tout cas que celui imaginé par Isaac Newton). Ça donne le vertige, non?
M Soulier n'avait-il pas raison en disant que la question du temps était la plus épineuse des questions philosophiques? En tout cas, on voit que l'on est à une conjonction des mathématiques, de la physique et de la philosophie. Au moins ces trois disciplines là…

Conclusion :



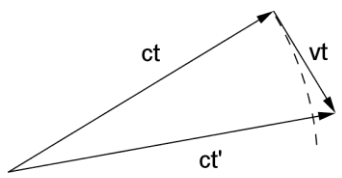
Voyons ce qu’en a fait Albert Einstein (en simplifiant beaucoup bien sûr…)



Une transformation de Lorentz conserve ce cône des possibles

Einstein dit que les trois lois suivantes sont vraies à condition que le temps ne soit pas absolu :

- la loi de composition des vitesses (somme vectorielle)
- la vitesse de la lumière dans le vide est une quantité absolue
- les lois de la physique sont les mêmes dans tous les repères galiléens.



Il faut donc nécessairement que t' soit différent de t (et même $t'>t$)

D’après le Théorème de Pythagore :

$c^2t'^2+v^2t^2=c^2t^2$ donc $c^2t'^2=c^2t^2 - v^2t^2$

donc $t'^2 = t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ *donc* $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma\, t$