Vous avez dit dénombrabilité ?

0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ;10 ;1
1 ;12 ;………1969 ;1970 ;1971
;1972 ;……..…98452 ;98453 ;
…5165423658 ;5165423659 ;..
.12345678901234567890I ;

Ouah ! Elle
peut compter
jusqu'à
combien
comme ça ?
Trop fort !

Les mathématiciens ont donné un nom à cet ensemble de nombres : l'ensemble des entiers naturels, et on le note $\mathbb{N}$

On a l'intuition que l'on peut compter sans jamais s'arrêter,… à l'infini… On dit, d'un ensemble qui peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, qu'il est **dénombrable**.

Premier vertige :

On m'a dit qu'il y avait autant de nombres pairs que de nombres entiers…
Pourtant, quand on compte de deux en deux, on oublie un nombre sur deux !

N'est-ce pas un peu surprenant ?

Sauf si on peut trouver une bijection entre ces deux ensembles…

$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\,;13\,;14\,;15\,;16\,;17\,;18\,;\ldots\}$

$\mathbb{P} = \{0\,;2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;12\,;14\,;16\,;18\,;20\,;22\,;24\,;26\,;28\,;30\,;32\,;\ldots\}$

Indication : chaque nombre à un double unique et chaque nombre a une moitié unique.

Un peu plus déconcertant encore :

Nous avons vu que $\mathbb{N}$ contient autant d'éléments que certaines de ces parties.

Cette fois-ci, prenons le problème sous un autre angle…

Pourrait-on faire tenir deux ensembles, ayant autant d'éléments que $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{N}$?

Question apparemment saugrenue ? Et pourtant…

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	…

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	…

Et plus de deux fois ? et une infinité de fois ?

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	$a_{0,4}$	$a_{0,5}$	…	$a_{0,\,n-1}$	$a_{0,\,n}$	$a_{0,\,n+1}$	…
0	3	8	15	24	35		$(n-1)^2+2(n-1)$	n^2+2n	$(n+1)^2+2(n+1)$	
$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	…	$a_{1,\,n-1}$	$a_{1,\,n}$	$a_{1,\,n+1}$	…
1	2	7	14	23	34					
$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	…	$a_{2,\,n-1}$	$a_{2,\,n}$	$a_{2,\,n+1}$	…
4	5	6	13	22	33					
$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	…	$a_{3,\,n-1}$	$a_{3,\,n}$	$a_{3,\,n+1}$	…
9	10	11	12	21	32					
…										
$a_{n-1,0}$	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	$a_{n-1,4}$	$a_{n-1,5}$	…	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n+1}$	…
$(n-1)^2$	$(n-1)^2+1$	$(n-1)^2+2$	$(n-1)^2+3$	$(n-1)^2+4$	$(n-1)^2+5$		$(n-1)^2+(n-1)$	n^2+n+1	$(n+1)^2+n+3$	
$a_{n,0}$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$a_{n,4}$	$a_{n,5}$	…	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$	$a_{n,n+1}$	…
n^2	n^2+1	n^2+2	n^2+3	n^2+4	n^2+5	…	$n^2+(n-1)$	n^2+n	$(n+1)^2+n+2$	
$a_{n+1,0}$	$a_{n+1,1}$	$a_{n+1,2}$	$a_{n+1,3}$	$a_{n+1,4}$	$a_{n+1,5}$	…	$a_{n+1,n-1}$	$a_{n+1,n}$	$a_{n+1,n+1}$	…
$(n+1)^2$	$(n+1)^2+1$	$(n+1)^2+2$	$(n+1)^2+3$	$(n+1)^2+4$	$(n+1)^2+5$		$(n+1)^2+(n-1)$	$(n+1)^2+n$	$(n+1)^2+n+1$	
…										

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…