$\mathbb{N}$ est-il le seul ensemble infini ?

Bien sûr que non, vous en connaissez d'autres : certains sous-ensembles de $\mathbb{N}$, une droite, ou un segment, ou encore un cercle, etc…

Evidemment, la question que l'on se pose immédiatement est :

« Peut-on mettre une droite et $\mathbb{N}$ en bijection ? »

Autrement dit : « $\mathbb{N}$ et une droite sont-ils des infinis de même nature ? »

Ou encore : « Peut-on dénombrer les points d'une droite ? »

Un petit travail préliminaire :

Arriverez-vous à mettre cette droite et ce segment en bijection ?

Indication : une étape intermédiaire peut s'avérer salutaire...

Puisque la droite et le segment sont en bijection, il « suffit » de chercher si l'on peut dénombrer les points d'un segment de longueur 1.

Pour ce faire, imaginons un mage, qui puisse faire des pas aussi petits qu'il le souhaite (dans les deux sens) pour marcher sur tous les points de la droite. A chaque pas, il note l'abscisse du point sur lequel il pose son minuscule pied.

Il lui faudrait un carnet infini vers le bas (car il y a une infinité de point) mais aussi vers la droite (car la plupart des nombres qu'il aura à y inscrire auront un développement décimal illimité)

Il obtiendrait ainsi une liste de nombres du style :

0,	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,	2	**6**	5	3	4	8	9	7	1	0	2	3	5	6	4	4	2	3	5
0,	3	2	**5**	6	5	4	1	0	0	0	0	2	5	6	5	8	4	1	0
0,	2	9	3	**5**	4	8	9	7	7	4	1	2	3	0	0	2	5	5	5
0,	4	5	6	8	**9**	7	1	2	3	5	6	6	6	4	4	5	8	5	2
0,	6	5	4	8	5	**2**	3	6	5	4	1	2	0	1	5	6	8	6	2
0,	5	3	2	6	2	5	**4**	1	8	9	7	2	1	5	6	4	5	1	5
0,	5	4	1	2	3	5	4	**6**	5	2	2	1	2	5	4	2	3	5	2
0,	5	4	5	2	1	5	1	4	**5**	6	5	4	5	4	5	2	1	1	1
0,	5	3	2	4	1	5	6	8	4	**9**	7	8	1	2	1	4	5	4	5
0,	7	5	2	5	4	4	5	4	5	5	**8**	5	5	6	5	8	4	4	4
0,	6	5	4	2	3	6	5	8	8	8	8	**8**	9	9	9	4	4	2	5

Ce carnet est donc infini : les lignes sont dénombrables car on peut numéroter les pas.

Pourtant, le mage a-t-il marché sur tous les points du segment ?

Par exemple, est-il passé par le point d'abscisse :

0,176603576099…

obtenu en prenant les chiffres qui sont sur la diagonale jaune de son carnet auxquels on ajoute 1 ?

remarque : si le chiffre est 9 on le remplace par 0

Pensez bien que le carnet est infini…

Quelle relation d'ordre a-t-on entre card([0 ;1]) et card $\mathbb{N}$?

Card([0 ;1]) est appelé cardinal du continu et noté $\aleph_1$ (aleph 1)

Une petite parenthèse sur l'hypothèse du continu.

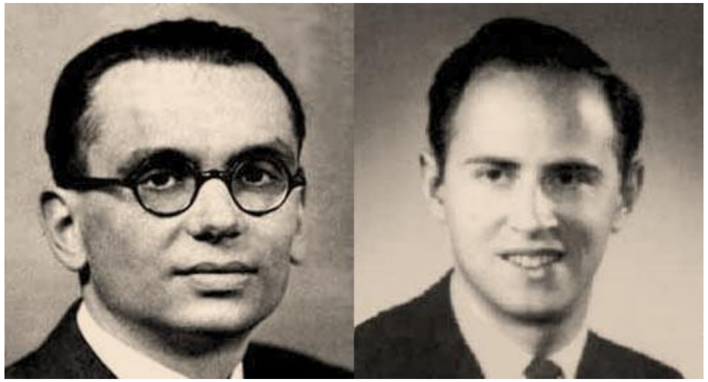
La question posée par les mathématiciens était :

« N'y a-t-il pas de cardinal intermédiaire entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$ entre le dénombrable et le continu. »

Autrement dit, l'hypothèse du continue est-elle vraie ? »

La réponse à cette question est assez extraordinaire (au sens étymologique du terme) et apportée par deux mathématiciens à 24 ans d'intervalle.

En 1939, Kurt Gödel démontre qu'on ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est fausse dans le cadre de la théorie des ensembles.



En 1963 Paul Cohen démontre qu'on ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est vraie dans le cadre de la théorie des ensembles

*Bref, cette question est **indécidable** !*

Cela signifie que quoi que l'on décide (cardinal intermédiaire ou pas), cela n'entrainera pas de contradiction.

Confortable, non ?