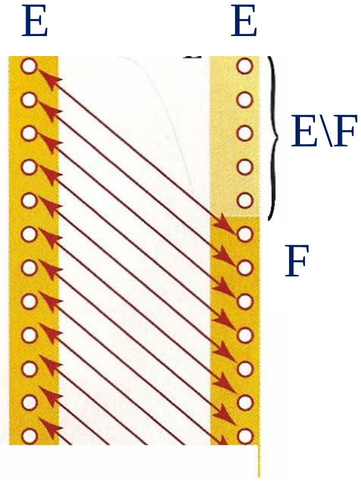
Notes à ceux qui commentent

- Compte-tenu de ce que l'on a déjà dit, l'ensemble des entiers naturels ℕ est un ensemble infini.
- Pourquoi n'y a-t-il pas de contradiction? Parce qu'on ne dit pas ce qu'est un "nombre infini". Un tel nombre n'existe pas, si on entend par nombres, des objets avec lesquels on peut calculer selon les règles classiques de l'arithmétique.
  On ne peut en effet faire avec ce supposé "nombre infini" des opérations et des calculs comme on le fait avec les nombres: lui ajouter 1, le multiplier par 3, le diviser par 2 ... tout cela n'a pas de sens arithmétique et ne devrait pas être dit.
- Cela n'empêche pas, bien sûr, d'accepter de dire par exemple : « **ℕ a une infinité d'éléments** » ou « **le nombre d'éléments de ℕ est infini** », mais ce sont des périphrases dont il faut penser que les mots pris séparément n'ont pas de sens. Ce ne sont que des manières de dire " **ℕ est infini**".
- On peut aussi accepter de dire « **ℕ a autant d'éléments que ℙ** », mais à condition de comprendre que cela ne veut pas dire plus que « il existe une bijection entre ℕ et ℙ ». Il ne faut pas croire que le "résultat" du compte des éléments de ℕ serait le même que le "résultat" du compte des éléments de ℙ. Tout simplement parce que il n'y a pas de "résultat" à ce compte.

- <u>Comment différencier les ensembles finis et infinis</u> :
  - Soit un ensemble infini E et une partie propre F de E en bijection avec E. Si on représente deux exemplaires de l'ensemble E et la bijection entre E et F, on voit que cette bijection laisse "de côté" certains éléments de E : l'ensemble noté E \ F (à lire "E sauf F").



  - Ainsi, dans l'ensemble infini ℕ, on peut laisser les nombres 0,1,2,3,4 de côté et constater que la bijection $n \longmapsto n + 5$ met en correspondance ℕ tout entier avec sa partie constituée des nombres supérieurs ou égaux à 5.

    C'est **la** différence entre un ensemble infini et un ensemble fini:

    En effet lorsque F et E sont des ensembles finis et que F est une partie propre de E, alors le nombre d'éléments de F est strictement inférieur au nombre d'éléments de E ; et la différence entre les deux nombres est exactement le nombre d'éléments de E laissés de côté pour composer la partie F.

    Cependant, nous venons de prononcer les mots "nombre d'éléments d'un ensemble" : l'emploi de cette expression est « réglementée » en mathématiques par les énoncés (assez intuitifs) suivants:

    - DÉFINITION: Un ensemble non-infini est appelé fini.
    - THÉORÈME: Tout ensemble fini F peut être mis en bijection avec la partie de ℕ constituée des nombres strictement inférieurs à un certain nombre *n*. Ce nombre est, par définition, le nombre d'éléments de F.
    - THEOREME: Si E est un ensemble fini et si F est strictement inclus dans E, alors le nombre d’éléments de F est strictement inférieur au nombre d’éléments de E.

THEOREME : Si E est un ensemble (fini ou infini) et si F est strictement inclus dans E, alors Card F $\leq$ Card E.

Toute la différence entre les ensembles finis et infinis tient dans ce fait que l'égalité peut avoir lieu: une partie propre F d'un ensemble infini E peut avoir le même "cardinal" que cet ensemble tout entier.

Dès lors que des ensembles peuvent être "infinis", la relation d'ordre naturelle entre les ensembles (dite inclusion) ne se comporte pas exactement avec les opérations (addition-ajout, soustraction-enlèvement, multiplication-dédoublement, ...) comme la relation d'ordre entre les nombres.

Passage au continu :

Ce raisonnement est le fruit de l'imagination de Georg Cantor et dit « diagonalisation à l'infini »

Supposons que le mage trouve le nombre fabriqué par Cantor sur la ligne *n* et que son $n^{\text{ième}}$ chiffre (sur la diagonale), écrit sur le carnet, soit *c*. Alors, puisque Cantor a ajouté 1 à chaque chiffre de la diagonale, on a $c=c+1$ et donc 0=1. La contradiction est de taille !

Conclusion, le mage n'a pas pu trouver ce nombre dans son carnet et le segment n'est pas dénombrable.

Donc card([0 ;1]) > card $\mathbb{N}$.

card([0 ;1]) est appelé cardinal du continu et noté $\aleph_1$

Cela veut dire qu'il y a au moins deux types d'infini…

En fait il y en a une infinité… (c'est bien plus drôle, mais c'est une autre histoire. Pour un peu plus tard si vous êtes sages !)