Nous pourrions parler du phénomène des bifurcations en liaison avec la dynamique des populations. Voici l'idée de base :

- Une population évolue avec des naissances et des décès en taux fixes. Si ces taux sont a et b par an, cela signifie que si la population compte N individus, alors on aura aN naissances et bN décès en une année.
- De la sorte d'une année sur l'autre, on passe de N individus à N+aN-bN=(1+a-b)N individus. En notant c la quantité 1+a-b, on passe de N à cN

Supposons maintenant que la population doive se nourrir ! Et qu'il y a conflit pour la nourriture, ceci conduisant à un surplus de décès proportionnel au nombre de fois où il y a de tels conflits. Ce pourrait être des chats de gouttière par exemple !
Supposons que les conflits sont en nombre proportionnel au nombre de rencontres possibles. Ces rencontres se comptent en dénombrant combien on peut former de couples au sein de la population. Si on a un premier élément du couple, alors le second doit être choisi parmi les N-1 autres individus de la population. On a donc N(N-1) couples a priori, sauf qu'on a compté deux fois chacun d'eux : une fois en prenant l'un des deux éléments du couple en premier et l'autre fois en prenant l'autre. On a donc N(N-1)/2 couples.

- Notons d le taux de décès accidentels.
- Supposons que les conflits sont en nombre proportionnel au nombre de rencontres possibles par un facteur f.
- On a donc fN(N-1)/2 conflits et ainsi dfN(N-1)/2 décès supplémentaires.
- Au total on passe donc de N à cN-dfN(N-1)/2, soit (c+df/2)N-dfN^2/2.
- En notant u=c+df/2 et v=df/2, l'évolution de notre population est donc un passage de N à uN-vN^2, chaque année.

Au lieu de considérer N, nous allons considérer P=vN/u. Si une année N est donné, alors P aussi et l'année suivante, on peut calculer P, puisqu'il est proportionnel à N par un facteur v/u :

- La nouvelle valeur de P est v/u . (uN-vN^2). Autrement dit vN-$(vN)^2$/u, ou encore uP-uP^2.
- Au final P passe de P à uP(1-P).

Selon la valeur de u on a des phénomènes de bifurcation ou de chaos. Je rappelle que u vaut 1+a-b+df/2. Ces valeurs sont comprises entre 0 et 2,5 si a, b, d et f sont compris entre 0 et 1 chacun. Mais si f peut être plus grand, on peut aller plus loin pour u. En général on prend u entre 0 et 4. Le chaos apparait pour 4, mais les bifurcations bien avant !

En programmant sur une calculatrice le physicien Feigenbaum a découvert ce phénomène. Vous pouvez aussi le faire, sur calculatrice ou ordinateur. Quelles sont les valeurs de u pour lesquelles des changements de comportement apparaissent pour la transformation P->uP(1-P) ?

Si l'aventure vous tente, vous pouvez aller musarder sur ce texte, destiné à des enseignants !