Soit un α réel strictement positif.
On considère un entier n non nul fixé au départ.
Il y a E(nα) entiers dans l'ensemble {1 ; 2 ; … ; E(n α)}

La famille $(E(np))$ comporte n entiers.

La fréquence d'éléments de la famille par rapport à l'ensemble {1 ; 2 ; … ; E(n α)} est $f(n)=\frac{n}{E(n\alpha)}$. La densité est la limite de f(n) quand n tend vers l'infini.

Or :

$n\alpha-1<E(n\alpha)\leqslant n\alpha$ donc $\alpha-\frac{1}{n}<\frac{E(n\alpha)}{n}\leqslant\alpha$

D'après le th des gendarmes : La limite qd n tend vers l'infini de $\frac{E(n\alpha)}{n}$ est α.

On en déduit que la densité est $\frac{1}{\alpha}$.

Remarques : Ce résultat est vrai pour tout α.
En particulier lorsque α=2 , on retrouve une densité de $\frac{1}{2}$.

Stéphane Mouclier.