**Le jeu des allumettes d'or**  de Wythoff .

**Principe du jeu :**

En premier lieu, il y a deux tas d'allumettes sur la table (chacun contenant un nombre d'allumettes différent bien entendu).

Chaque joueur lorsque son tour arrive peut :

-Retirer autant d'allumettes qu'il le souhaite dans l'un des tas.

-Retirer le même nombre (celui qu'il souhaite , bien sûr ! ) d'allumettes dans les deux tas.

Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette !

**Stratégie gagnante :**

Plaçons-nous dans un repère. Le point qui représente l'état du jeu au départ est repéré par deux coordonnées : en abscisse le nombre d'allumettes d'un des tas et en ordonné le nombre d'allumettes dans l'autre tas. Il devient dès lors beaucoup plus simple de suivre l'évolution du jeu.

Utilisons **les propriétés** d**es multiples** de **φ et de φ ²**

φ ≈ 1,618  2φ  ≈ 3,236 3φ ≈ 4,854   4φ ≈ 6,472

5φ ≈ 8,092   6φ ≈ 9,708   7φ ≈ 11,326 8φ ≈ 12,944

Et regardons maintenant les multiples des carrés :

φ² ≈ 2,618                    2φ² ≈ 5,236                   3φ² ≈ 7,854

4φ² ≈ 10,472                5φ² ≈ 13,091                6φ² ≈ 15,708

On remarque que les parties entières de φ et de φ² semble « recouvrir » l'ensemble IN !

On peut le démontrer…

Ce qui est remarquable et qui risque de vous étonner, c'est que de cette propriété, découle la stratégie gagnante !

Il vous « suffit » de faire évoluer le jeu vers une configuration

( E (nφ) ; E (nφ²) )  ou  ( E (nφ²) ; E (nφ) ) ( avec E est la fonction partie entière ). Autrement dit d’amener l’état du jeu sur un point dont les coordonnées sont du type

( E (nφ) ; E (nφ²) )  ou  ( E (nφ²) ; E (nφ) ) Une fois le point placé avec de telles coordonnées, votre adversaire ne pourra pas en faire de même. **Dès lors, il vous sera donc aisé à chacun de vos coups de vous remettre dans l’ensemble des points de coordonnées** (E(nφ);E(nφ²))  ou  (E(nφ²);E(nφ))  jusqu'à ce que la partie se finisse et que vous soyez déclaré vainqueur !

**Théorème de Beatty (Wikipédia)**

Le **théorème de Beatty** est un théorème d'arithmétique publié en 1926 par le mathématicien canadien Samuel Beatty (mais déjà mentionné par Lord Rayleigh en 1894) qui donne une condition nécessaire et suffisante sur deux réels pour que les deux suites « de Beatty » associées partitionnent [ℕ](http://fr.wikipedia.org/wiki/Entier_naturel)\*.

**Énoncé**

Il affirme l'équivalence des deux points suivants, pour deux nombre réels p et q strictement positifs :

* Les nombres *p* et *q* sont irrationnels et vérifient
* Les deux suites d'entiers P=(E(*np*))nIN\*  et  Q=(E(*nq*))nIN\*  forment une partition de l'ensemble ℕ\*.

Ici, la fonction E désigne la fonction partie entière.

**Démonstration**

On se donne *p* et *q* deux réels strictement positifs, tels que les suites P et Q forment une partition de ℕ\*.

Le résultat devient assez intuitif si l'on introduit la densité d'une partie A de ℕ\*, c'est la limite - si elle existe - lorsque *n* tend vers  de   . Par exemple, l'ensemble de nombres pairs (ou l'ensemble des nombres impairs) a une densité qui est , l'ensemble des nombres premiers a comme densité 0.

On voit facilement (\*) que les ensembles  où  est un réel positif ont comme densité . Les supports des suites P et Q forment une partition de ℕ\*, donc la somme de leurs densités vaut 1 :

De plus, *p* et *q* ne peuvent être tous les deux rationnels, car si c'est le cas  , alors E(b1a2p)=E(b2a1q)=a1a2 . Or les suites P et Q n'ont aucun élément en commun. L'un des deux est irrationnels, et par suite les deux sont irrationnels (car p-1+q-1=1)

Réciproquement, si p et q sont irrationnels et p-1+q-1=1, montrons par l'absurde que les supports des suites P et Q sont disjoints. Soit k un entier qui s'écrit sous la forme k= E(np) = E(mq) .

Par définition de la partie entière, nous avons les inégalités suivantes :

k \leq np < k + 1 \mbox{  et  } k \leq mq < k + 1

Divisons la première inégalité par p, et la seconde par q :

\frac kp\le n<\frac kp+\frac1p\mbox{  et  }\frac kq\le m<\frac kq+\frac1q.

Sommons ces deux inégalités, on obtient :

k \leq n + m < k + 1

k, n et m étant des entiers, ceci impose que k = n + m. On a forcément égalité dans les deux inégalités précédentes. Donc k = np et k = mq. Ceci est absurde car p et q sont irrationnels.

Montrons maintenant que tout entier naturel non nul est atteint par l'une des deux suites. Soit  n \geq 1 et k = E(np). k est atteint par la suite P, donc pas par la suite Q, il existe un unique entier m tel que :

E(mq) < k < E((m+1)q) 

En fait, l'entier E(mq) est le plus grand entier de la suite Q inférieur à k. Les applications r \mapsto E(rp) et r \mapsto E(rq) sont injectives car p et q sont plus grands que 1. L'intervalle \{1, \dots, k\} contient donc  m + n éléments des suites P et Q (car ces deux suites ont des supports disjoints). Il suffit de conclure en prouvant k = n + m. On a :

\frac kp\le n<\frac{k+1}p\mbox{  et  }\frac kq-1<m<\frac{k+1}q.

En additionnant il vient  k - 1 < n + m < k + 1, soit k = n + m. CQFD.

Ce résultat ne se généralise pas : il est impossible de partitionner ℕ\* avec plus de trois suites de cette forme (dites « suites de Beatty »).

Exemple

L'un des premiers exemples connus a été découvert dès 1907 par le mathématicien hollandais [Wythoff](http://fr.wikipedia.org/wiki/Willem_Abraham_Wythoff), indépendamment du théorème de Beatty. Pour \phi le [nombre d'or](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or), nous avons :

\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1 \,.

Les deux suites obtenues sont alors :

* {\rm E}(n\phi), *n* > 0 : 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, ...
* {\rm E}(n\phi^2), *n* > 0 : 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47, ...

Les couples ({\rm E}(n\phi), {\rm E}(n\phi^2)) apparaissent dans la résolution du [jeu de Wythoff](http://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_Wythoff), et caractérisent les positions à partir desquelles le joueur qui a le trait ne peut pas gagner.

(\*)

Soit un  réel strictement positif.

On considère un entier n non nul fixé au départ.

Il y a E(*n*) entiers dans l'ensemble {1 ; 2 ; … ; E(*n* )}

La famille (E(*n*p)) comporte n entiers.

La fréquence d'éléments de la famille par rapport à l'ensemble {1 ; 2 ; … ; E(*n* )} est

*f* (*n*)= . La densité est la limite de f(n) quand n tend vers l'infini.

Or :

*n*α−1<E(*n*α)⩽*n*α donc α− < ⩽ α

D'après le th des gendarmes : La limite qd n tend vers l'infini de est .

On en déduit que la densité est

Remarques : Ce résultat est vrai pour tout .

En particulier lorsque =2 , on retrouve une densité de