Projection stéréographique

1 Principe de cette projection

1.1 Introduction

Essayer de représenter la sphère (ou une partie de la sphère) dans un plan n'est pas un problème facile (lorsqu'on admet - par approximation - que la surface terrestre est une sphère, une telle représentation d'une partie de la surface sur un plan s'appelle une carte).
On a inventé de nombreuses méthodes pour essayer de “projeter” des points de la sphère sur un plan...

Nous parlerons ici d'une projection particulière, la **projection stéréographique**. Celle-ci possède une propriété particulière “remarquable”, elle conserve les angles !
Mais précisons tout d'abord le fonctionnement de cette projection.

1.2 Construction des projetés

On utilise une “source”, qui est un point S de la sphère (par exemple pour notre sphère terrestre on peut choisir comme point S le pôle nord). On considère le diamètre de la sphère qui passe par S et un plan P orthogonal à ce diamètre et ne passant pas par le point S (si S est le pôle nord, P est parallèle au plan de l'équateur).

$*$ A chaque point A du plan P correspond un point (noté A') de la sphère, qui est l'autre point d'intersection de la droite (SA) avec la sphère (le premier point d'intersection de la droite (SA) avec la sphère étant le point S)[1].

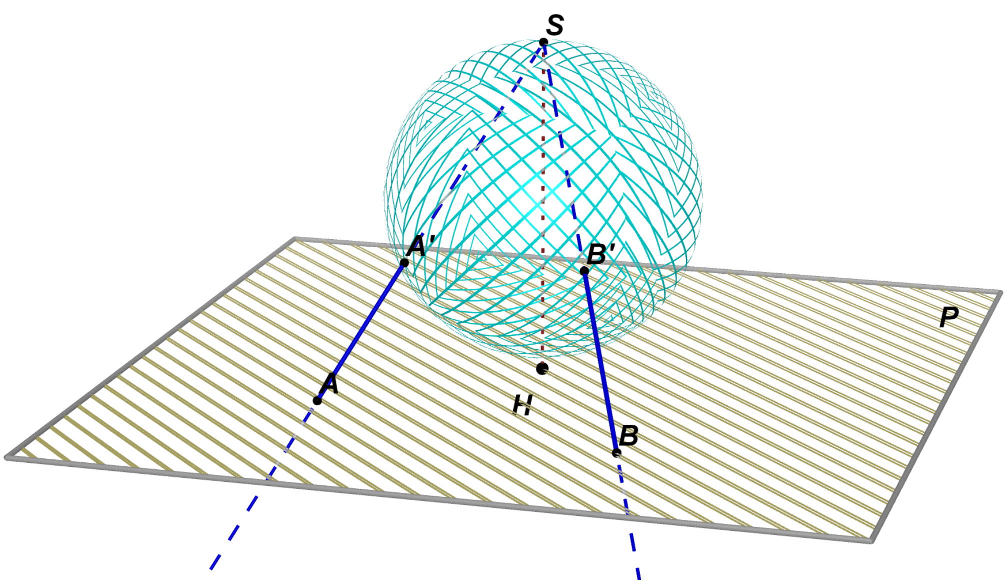

FIGURE 1 – *Construction du projeté*

$*$ Réciproquement à un point donné B' de la sphère, différent de S, correspond un point (noté B) d'intersection de la droite (SB') avec le plan P.

1. Cette définition demande justification : en effet, il faut démontrer que ce point d'intersection A' existe et est défini sans ambiguïté : en effet, puisque le point S est déjà à la fois sur la sphère et sur la droite (SA), soit (SA) coupe la sphère en deux points, et alors A' est correctement défini comme celui de ces deux points qui n'est pas S, soit (SA) est tangent en S à la sphère ; dans ce dernier cas le point A serait à la fois dans le plan P' et dans le plan P, ce qui est impossible car ces deux plans ne se rencontrent pas, puisqu'ils sont parallèles (car tous deux perpendiculaires au diamètre de la sphère qui passe par S) et que $S \notin P$.

Il y a une correspondance *"bijective"* entre les points A du plan et les points A' de la sphère autres que le point-source S. Le point A' de la sphère est toujours différent du point S : en effet, comme le plan P ne passe pas par S, la droite (SA) n'est jamais dans le plan tangent en S à la sphère, elle recoupe donc la sphère en un point A' distinct de S. Réciproquement si un point B' de la sphère est différent de S, la droite (SB') existe et elle n'est pas contenue dans le plan tangent en S à la sphère ; elle n'est donc pas parallèle au plan P et coupe par conséquent le plan P en un point B.
On remarquera que si le point B' coïncide avec A', alors le point B se trouve en A, et que si A coïncide avec B, alors le point A' se trouve en B'.
Plus le point A s'éloigne dans le plan P, plus le point A' est proche du point-source S et réciproquement, si B' est proche de S, B est éloigné dans le plan P.

1.3 Projetés de figures simples

$*$ Si on associe à un point B (distinct de A) du plan P le point B' de la sphère (obtenu par intersection de la sphère avec la droite (SB)), alors à tout point M de la droite (AB) correspond un point M' obtenu comme intersection de la sphère et de la droite (SM). Si Q est le plan qui contient le triangle SAB, l'intersection de Q et de la sphère est un cercle (noté $(SA'B')$) qui contient les points S, A' et B', c'est donc le cercle du plan Q qui est circonscrit au triangle $SA'B'$. Comme le point M' appartient à la fois à la sphère et au plan Q, il est situé sur ce cercle $(SA'B')$ (privé du point S).
Réciproquement, pour tout point M' situé sur le cercle $(SA'B')$ et différent de S, la droite (SM') est contenue dans le plan Q, elle coupe donc le plan P en un point M situé sur l'intersection des plans P et Q, donc situé sur la droite (AB).
Une droite du plan P s'envoie donc sur un cercle de la sphère passant par S et réciproquement.

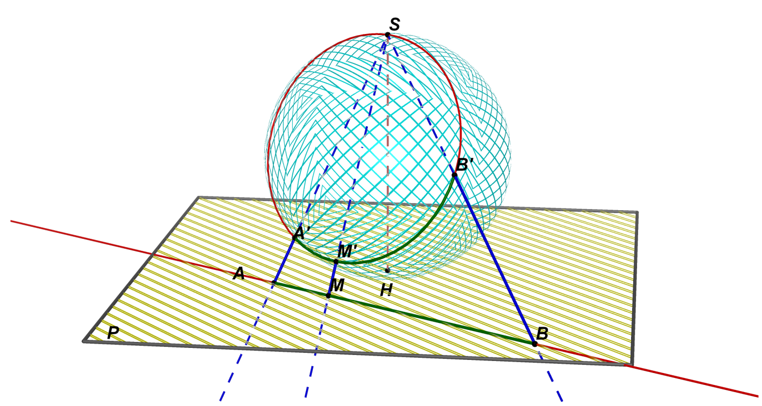

FIGURE 2 – *Image d'un segment ou d'une droite*

$*$ Aux points du segment $[AB]$ du plan P correspondent les points d'un arc $\overset{\frown}{A'B'}$ du cercle $(SA'B')$ de la sphère : celui des deux arcs $\overset{\frown}{A'B'}$ qui ne contient pas le point S.

$*$ Aux points de la demi-droite $[AB)$ d'origine A dans le plan P correspondent les points d'un arc $\overset{\frown}{A'S}$ du cercle $(SA'B')$ de la sphère : celui des deux arcs $\overset{\frown}{A'S}$ qui contient B', on notera aussi cet arc de cercle $\overset{\frown}{A'B'S}$ dans cet exposé.

$*$ On peut comparer aussi les points d'un triangle ABC du plan P et les points correspondants d'un triangle sphérique $A'B'C'$ [2].

$*$ On peut construire les images des points d'un parallélogramme $ABCD$ situé dans le plan P, on obtient un parallélogramme sphérique $A'B'C'D'$.

2. On entend ici par triangle sphérique un triangle dont les côtés sont les arcs de cercles images des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ du triangle ABC. Attention, cette notion de triangle sphérique se distingue d'une autre notion (plus classique) de triangle sphérique dont les côtés sont des arcs de grands cercles.

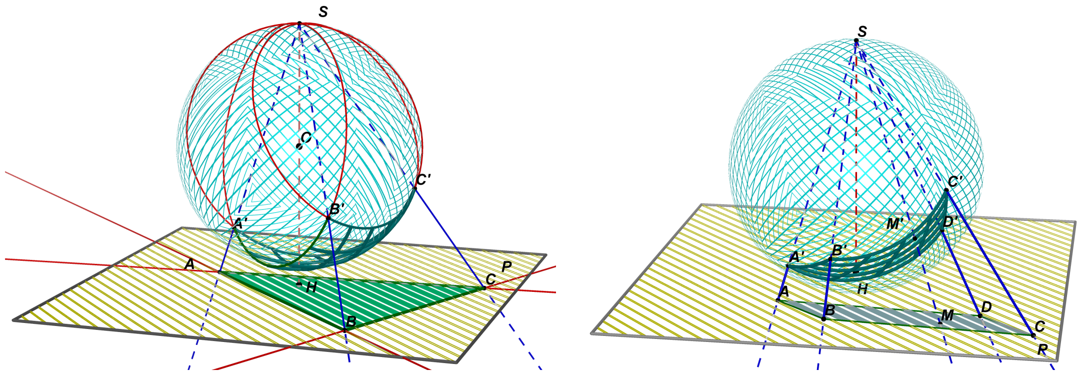

FIGURE 3 – *Image d'un triangle ou d'un parallélogramme*

1.4 Remarque sur le choix du plan P sur lequel on projette

On peut faire varier le plan orthogonal à la droite (OS) sur lequel on projette.

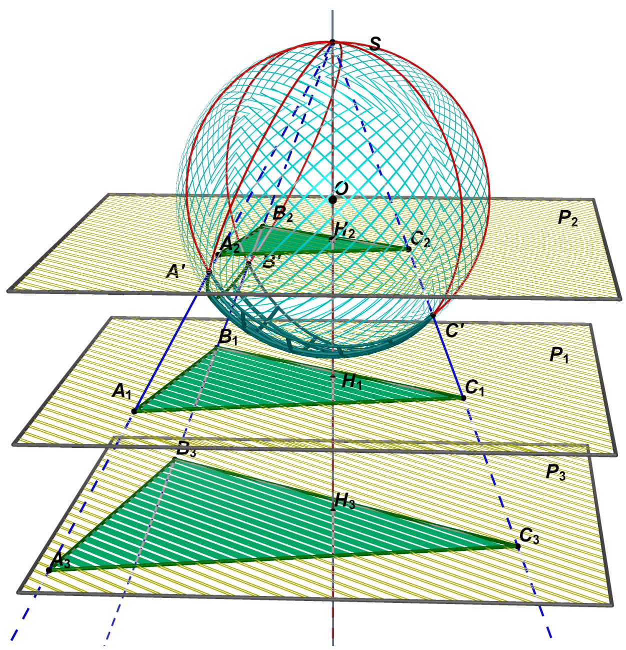

FIGURE 4 – *Comparaison de projetés sur des plans parallèles* P_1, P_2 *et* P_3

Les images d'une figure obtenues en faisant une projection stéréographique sur les plans P_1 et P_2 orthogonaux à la droite (OS) respectivement en H_1 et en H_2, sont homothétiques.
Par exemple, sur cette figure 4, on passe du triangle $A_1B_1C_1$ au triangle $A_2B_2C_2$ par une homothétie de rapport $\frac{SH_2}{SH_1}$: les directions, les angles sont conservés, les dimensions sont proportionnelles.
Pour des questions de lisibilité des figures, on a intérêt à utiliser plutôt des dessins dans lesquels la sphère et le plan de projection ne se rencontrent pas.

2 La conservation des angles

2.1 Énoncé

La propriété remarquable de cette projection "stéréographique", à savoir la conservation des angles, s'écrit ainsi :

Si $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$ sont les deux arcs de cercles sur la sphère, si $[AB)$ et $[AC)$ sont les deux demi-droites qui leur correspondent par projection stéréographique dans le plan P, alors

$$\widehat{BAC} = \text{angle}\big(A'\overset{\frown}{B'}S, A'\overset{\frown}{C'}S\big)$$

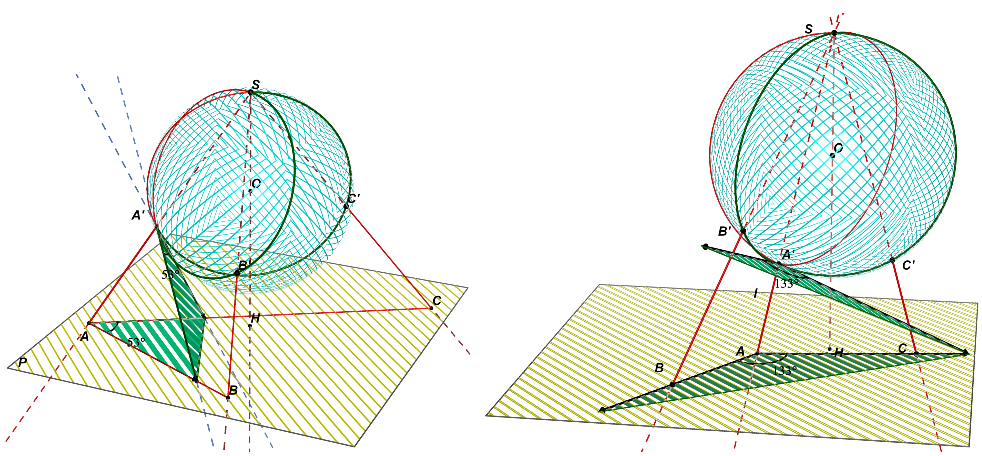

Figure 5 – *La conservation des angles*

En d'autres termes, l'angle des demi-droites est égal à l'angle des arcs de cercles, l'angle de ces arcs de cercles étant défini comme l'angle des deux demi-droites d'origine A' qui sont tangentes en A' à ces arcs de cercles.
Pour comprendre ce théorème, cette figure 5 est un premier dessin des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ du plan P, des arcs de cercles $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$ correspondants et des demi-droites tangentes en A' à ces arcs de cercles.

2.2 Démonstration de l'égalité de ces angles

On considère une sphère de centre O (de rayon non nul) et un point S de cette sphère. On se donne un point H sur la demi-droite $[SO)$, distinct de S, et un plan P perpendiculaire en H à la demi-droite $[SO)$, qui sera le plan de la projection stéréographique.
A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan P.
On note P'_1 le demi-plan limité par la droite (SA) et contenant le point B : cette définition a un sens car B n'est pas situé sur la droite (SA), puisque A est l'unique point d'intersection de la droite (SA) avec le plan P. On définit de la même manière (et avec les mêmes justifications) le demi-plan P'_2 comme le demi-plan limité par la droite (SA) et contenant le point C.
Les demi-plans P'_1 et P'_2 forment un dièdre d'arête (SA). On note A' le point d'intersection de la droite (SA) avec la sphère.

Le demi-plan P'_1 coupe le plan P selon la demi-droite $[AB)$, il contient donc la demi-droite $[SB)$ et le point B' d'intersection de la demi-droite $[SB)$ avec la sphère, par conséquent le demi-plan P'_1 coupe la sphère selon l'arc $A'\overset{\frown}{B'}S$; cet arc est donc entièrement inclus dans le demi-plan P'_1 et, comme son extrémité A' est sur la frontière de ce demi-plan, la demi-tangente en A' à l'arc de cercle $A'\overset{\frown}{B'}S$ est

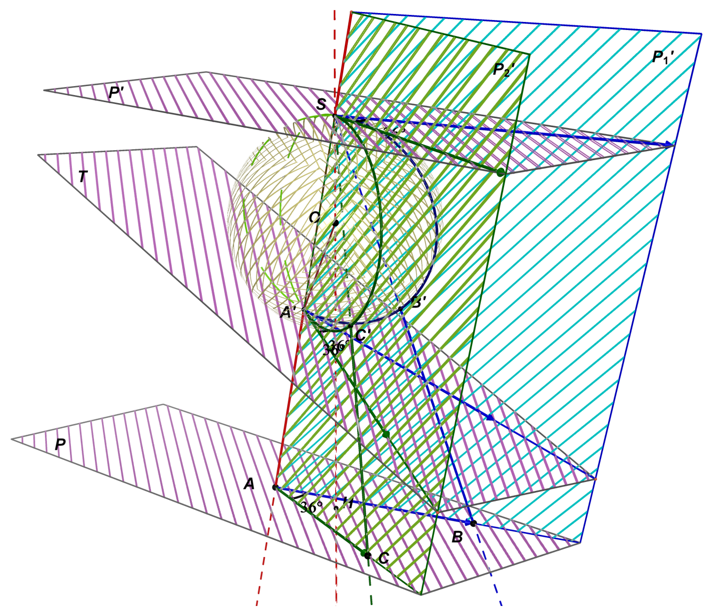

FIGURE 6 – *La mise en place des plans P, P' et T, les demi-plans P'_1 et P'_2*

également entièrement incluse dans le demi-plan P'_1.
Le demi-plan P'_2 coupe le plan P selon la demi-droite $[AC)$, il contient donc la demi-droite $[SC)$ et le point C' d'intersection de la demi-droite $[SC)$ avec la sphère, par conséquent le demi-plan P'_2 coupe la sphère selon l'arc $A'\overset{\frown}{C'}S$; cet arc est donc entièrement inclus dans le demi-plan P'_2 et, comme son extrémité A' est sur la frontière de ce demi-plan, la demi-tangente en A' à l'arc de cercle $A'\overset{\frown}{C'}S$ est également entièrement incluse dans le demi-plan P'_2.

Les demi-tangentes en A' aux arcs $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$ sont toutes deux contenues dans le plan T tangent à la sphère au point A' ; ce plan coupe les deux demi-plans [3] P'_1 et P'_2 du dièdre selon deux demi-droites issues de A' ; d'après ce qui précède, ces demi-droites sont les demi-tangentes en A' aux arcs $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$ respectivement (*voir la figure 6 ci-contre*).

Par un raisonnement analogue, on démontre que la demi-tangente en S à l'arc $A'\overset{\frown}{B'}S$ est l'intersection du demi-plan P'_1 et du plan P' tangent à la sphère au point S et que la demi-tangente en S à l'arc $A'\overset{\frown}{C'}S$ est l'intersection du demi-plan P'_2 et du plan P'.

On considère à présent le plan médiateur R du segment $[A'S]$ (*voir la figure 7*) :

- Comme $OA' = OS$, le plan R passe par le centre O de la sphère, c'est donc un plan de symétrie de la sphère et cette symétrie échange les points A' et S, elle échange donc aussi les plans T et P' tangents à la sphère respectivement aux points A' et S.
- Les demi-plans P'_1 et P'_2, de frontière commune la droite $(A'S)$, sont perpendiculaires au plan R, ils sont donc leurs propres symétriques par rapport au plan R.
- Comme la symétrie par rapport au plan R envoie le plan T et le demi-plan P'_1 respectivement sur le plan P' et le demi-plan P'_1, elle envoie la demi-droite d'intersection de T et P'_1 sur la demi-droite d'intersection de P' et P'_1, l'image par la symétrie de la demi-tangente en A' à l'arc $A'\overset{\frown}{B'}S$ est donc la demi-tangente en S au même arc.
  On démontre de la même manière que l'image par la symétrie de la demi-tangente en A' à l'arc $A'\overset{\frown}{C'}S$ est la demi-tangente en S au même arc.

3. Comme le plan T est tangent à la sphère au point A', il ne contient pas le point S, il est donc sécant en A' à l'arête (SA) du dièdre et coupe par conséquent les deux demi-plans P'_1 et P'_2 selon deux demi-droites issues de A'.

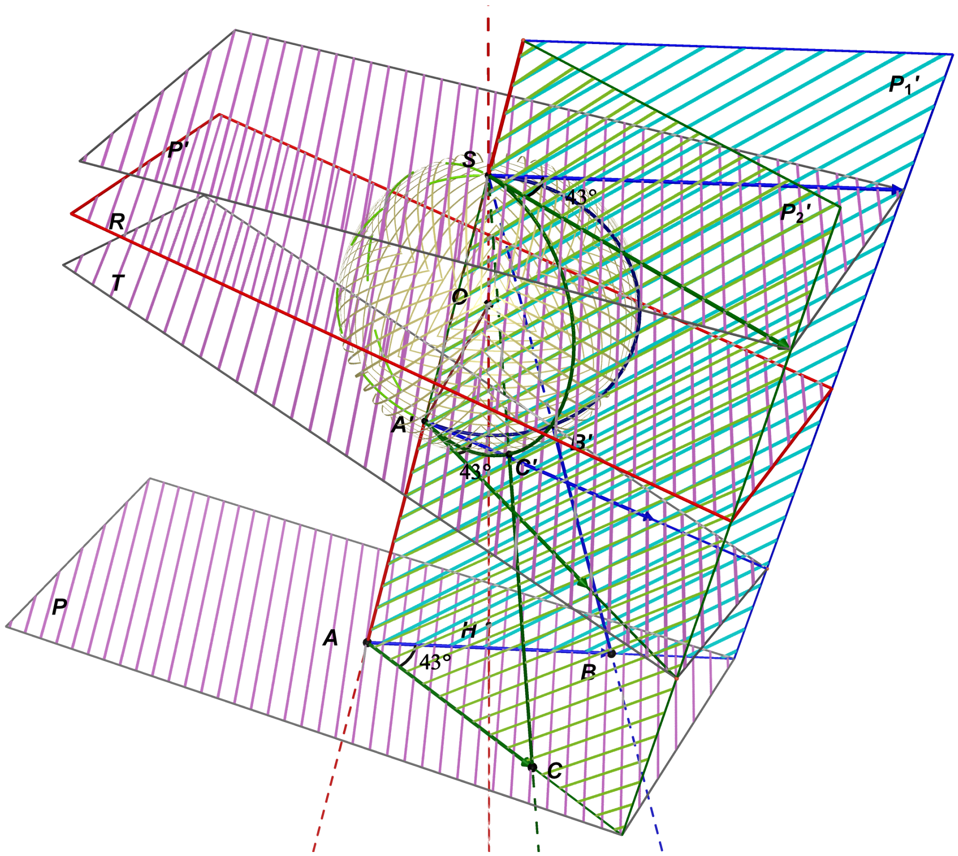

FIGURE 7 – *Le plan médiateur du segment $[AS]$, noté R, est un plan de symétrie qui laisse globalement invariants les arcs de cercles $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$ et qui échange les demi-tangentes en A et en S à ces arcs de cercles. Les angles formés par ces demi-tangentes sont égaux, l'angle formé par les demi-tangentes en S est aussi l'angle $\widehat{BAC}$*

L'angle formé par les deux demi-tangentes en S aux arcs $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$ est donc égal à l'angle formé par les deux demi-tangentes en A' à ces mêmes arcs.

– Le plan P' étant tangent en S à la sphère, il est orthogonal au rayon $[OS]$, donc parallèle au plan P. Dans le demi-plan P_1', la demi-droite d'intersection avec le plan P' est donc parallèle à la demi-droite d'intersection avec le plan P et de même sens ; la demi-tangente en S à l'arc $A'\overset{\frown}{B'}S$ est donc parallèle à la demi-droite $[AB)$ et de même sens. On démontre de la même manière que la demi-tangente en S à l'arc $A'\overset{\frown}{C'}S$ est parallèle à la demi-droite $[AC)$ et de même sens. On en déduit que l'angle $\widehat{BAC}$ est égal à l'angle formé par les demi-tangentes en S aux arcs $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$, lui-même égal (d'après le point précédent) à l'angle formé par les demi-tangentes en A' aux arcs $A'\overset{\frown}{B'}S$ et $A'\overset{\frown}{C'}S$

Cette dernière égalité

$$\widehat{BAC} = \text{angle}\big(A'\overset{\frown}{B'}S, A'\overset{\frown}{C'}S\big)$$

correspond à la conservation des angles par projection stéréographique.

3 Conclusion

Comme toutes les projections de la sphère ou d'une partie de la sphère sur le plan, la projection stéréographique ne conserve pas les distances : pour le démontrer, il nous suffit de remarquer que les distances sont bornées sur la sphère alors qu'elles ne sont pas bornées dans le plan.

Ceux qui veulent voir des différences entre les distances sur la sphère et dans le plan peuvent regarder la figure 7 : le rectangle $ABCD$ étant de longueur et de largeur fixées, les distances AB, AC et AD et l'aire de $ABCD$ restent constantes quand on déplace le rectangle par translation dans le plan P. En revanche, vers quelle limite tendent les distances $A'B'$, $A'C'$ et $A'D'$ et l'aire du "rectangle sphérique" $A'B'C'D'$ lorsque le rectangle $ABCD$ s'éloigne à l'infini ? Remarquer que la projection stéréographique ne conserve pas non plus les aires.

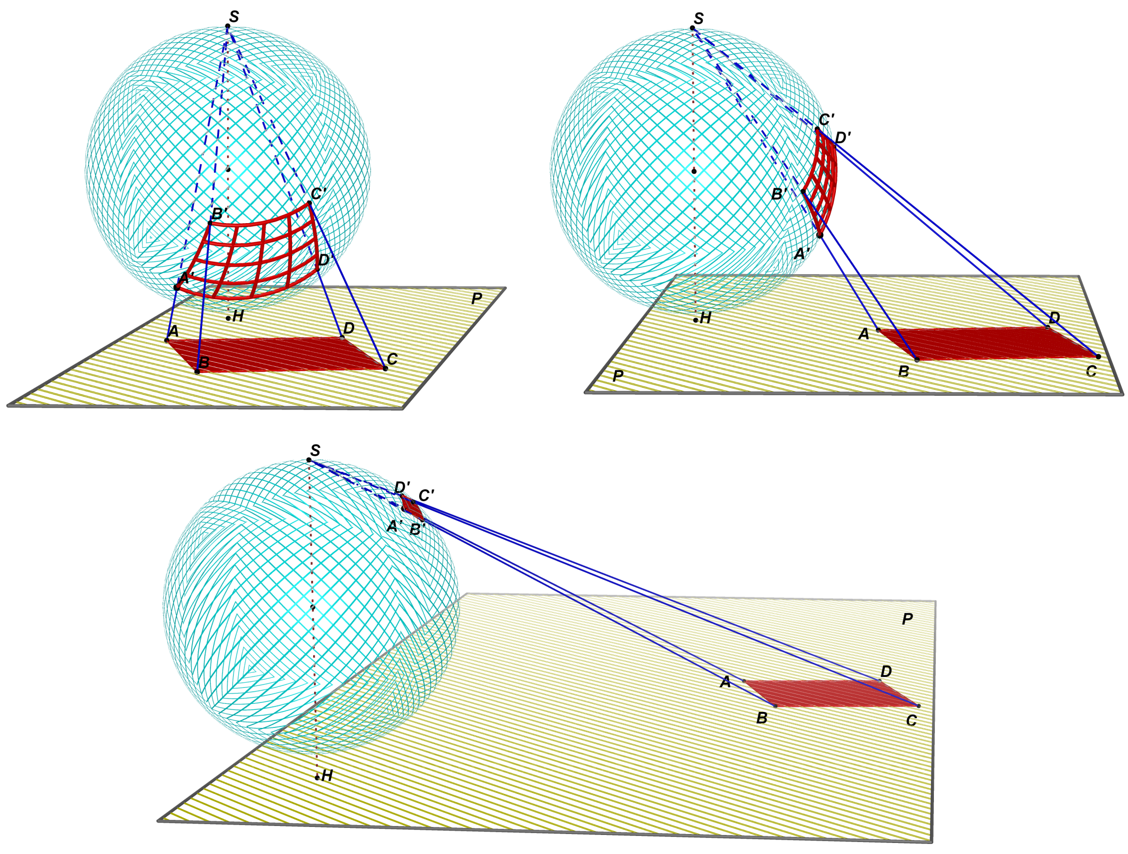

FIGURE 8 – *Lorsqu'on ne fait que translater le rectangle $ABCD$ dans le plan P, les rectangles sphériques $A'B'C'D'$ correspondants conservent les mêmes angles mais pas les mêmes dimensions*