LYCEE ATLANTIQUE
LUÇON SUD VENDEE

Concours C-Génial 2014

Réalisé par le Club de Mathématiques du lycée Atlantique

Louise Agat (2nde)- Pauline Bétard (1ère L)- Alan Branchereau (Term S)- Enora Caron (2nde)- Fabien Gioria (2nde)- Mathilde Martin (1ère S)- Titouan Meysonnier (1ère S)- Franck Percot (2nde)- Augustin Symoens (1ère S)

Compte rendu de notre recherche 2013/2014

sur

Des coloriages économiques

Au début de l’année, nous avons commencé à réfléchir au thème que nous allions aborder avec le club maths.

Si cela nous intéressait, M Bonjean nous a proposé de demander à un ami, le mathématicien François Sauvageot, de nous poser un problème. Cela paraissait « risqué » ! Et si nous n’étions pas inspirés ! Mais le défi était grisant, nous avons accepté son offre.

François Sauvageot nous a proposé plusieurs problèmes (sur des jeux de cartes, des pliages ou des tours de magie, …). Ils étaient tous intéressants, mais nous ne pouvions pas tout faire en ne nous retrouvant au club qu’une heure par semaine le mercredi après-midi. Alors nous avons choisi de travailler sur ceux qui parlaient de coloriages. Nous étions curieux de savoir quelles mathématiques il pouvait y avoir derrière cette activité que l’on pratiquait depuis que nous étions tout petit…

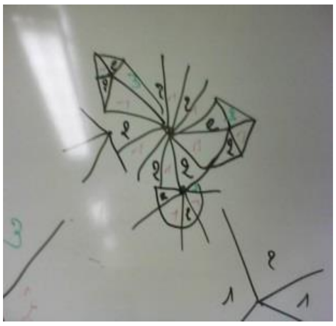
- 1er problème : Chercher le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les pays d’une carte de géographie. Mais pas n'importe comment ! Sur une planète sphérique, puis d’une planète cubique, tétraédrique, …polyédrique, de la forme d’une bouée, …. sans que deux pays limitrophes soient de la même couleur.
- 2ème problème : Chercher le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier un plan, de sorte que deux points distants d’une unité ne soient pas de la même couleur.

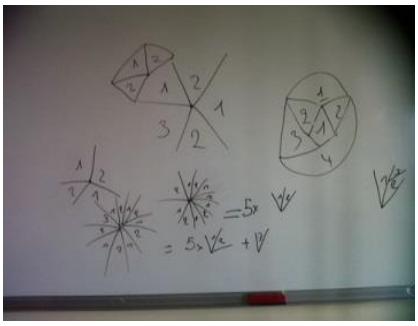
Histoire de la recherche :

Pour commencer, nous avons essayé de colorier avec le moins de couleurs possible, les départements de la région Pays de la Loire, les départements ou encore les régions françaises, sans que deux zones adjacentes aient la même couleur. Puis une carte d’Europe.

Comme nous avons senti que nous serions vite à court de cartes, nous avons testé avec des formes plus géométriques ou artistiques : des pavages. Nous avons conjecturé, à partir de ces essais que la forme et la taille des zones n’avait pas d'influence sur le nombre de couleurs, et qu’il fallait surtout s’intéresser au nombre de frontières avec les autres zones.

Très vite nous avons remplacé les couleurs par des nombres car c’était plus rapide.





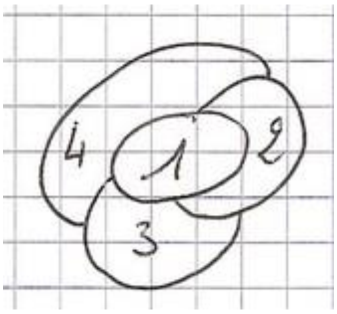
Nos remarques sur les pavages, nous on amenées à concentrer notre attention sur les points de concours des frontières. A un nombre pair de frontières concourantes correspondait deux couleurs. Et à un nombre impair correspondaient trois couleurs. (Voir photos du tableau)

Cela ne nous menait en fait pas très loin et ne correspondait à rien dans la réalité (ce n'est peut-être pas le plus important...), mais nous avons vu que nous pouvions remplacer la frontière par un segment.

Nous avons alors commencé à construire des pavages les plus compliqués possibles, car on pensait qu'il y avait une corrélation entre la complexité du pavage et le nombre de couleurs.

Mais quand nous pensions avoir trouvé une solution avec 5 couleurs ou plus, un(e) autre arrivait toujours à le faire avec 4 ou moins de 4. Cela semblait peine perdue.

Nous avons alors émis deux hypothèses :



- 4 était peut-être ce nombre maximum de couleurs dont nous avions besoin ;
- pour arriver à 4, il fallait que les pays soient d'un seul morceau.

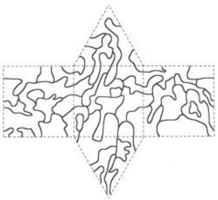
Plutôt que de chercher à ajouter une cinquième couleur, nous avons alors tenté de trouver un argument pour prouver que l'on n'en avait jamais besoin. Nous avons trouvé ce dessin illustrant cette conjecture :

En effet, pour ajouter une cinquième couleur, il faudrait que celle-ci soit en contact avec les 4 autres, or cela ne paraît pas possible.

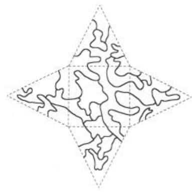
A ce stade, nos professeurs nous ont expliqué que cette propriété avait un nom : le théorème des 4 couleurs. On s'est alors dit : « Super ! Un théorème ! On le démontre ? ». Mais là encore ils nous ont expliqué que cette démonstration avait une histoire, 1ère démonstration nécessitant un ordinateur et patati et patata…, que nous n'étions pas au bout de nos peines et qu'ils ne nous seraient d'aucun secours pour tenter de la comprendre ensemble! Nous pensions pourtant avoir un argument de poids avec notre petit dessin !

Alors pourquoi nous poser un tel problème ? Il fallait peut-être continuer dans l'escalade des défis ?

Nous sommes revenus aux questions posées par François Sauvageot et nous nous sommes dit que si on « sortait » du plan (sphère, polyèdres), nous trouverions peut-être plus quelque chose à notre portée…



Nous avons donc tenté de colorier des patrons de polyèdres, de façon qu'ils puissent être reformés en respectant les contraintes de couleurs.



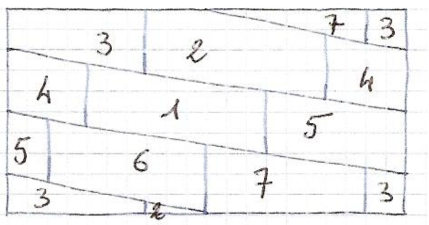
Mais là encore nous avons remarqué que, sur les polyèdres que nous avions testés, 4 couleurs semblaient suffire. C'est en réfléchissant au cas de la sphère que nous avons compris pourquoi. Puisque la forme des pays n'a pas d'importance, pourquoi ne pas considérer la sphère ou le polyèdre comme un ballon qu'on peut « déformer » pour « l'aplatir »… comme sur les cartes stéréographiques.

Image extraite du site :Images des maths

Nous nous sommes donc attaqués à un solide non convexe, la bouée, pour voir si le résultat serait le même. Première difficulté : le patron d'une bouée n'est pas possible à réaliser... Mais puisque nous avions « déformé » la sphère, pourquoi ne pas déformer la bouée ? Nous avons à ce propos appris que le nom mathématique d'une bouée était un tore.

Nous avons donc cherché différents découpages, et finalement, nous nous sommes rendu compte qu'il suffisait de prendre un rectangle dont les côtés opposés se rejoignent deux à deux. Nous avons remarqué que les zones se trouvant dans les 4 angles devaient être de la même couleur, ainsi que les zones qui se trouvaient en face l'une de l'autre sur les côtés opposés du rectangle. Par facile à dire mais François Sauvageot, dans un message, a trouvé une formule simple : « le caractère pac-man de la bouée ».

Avec ces remarques, nous avons pavé notre bouée et très vite nous avons vu que 4 couleurs ne suffisait pas. Il était assez simple de trouver de pavages qui nécessitent 5 couleurs. Mais nous sentions que ça n'allait pas s'arrêter là. Notre idée était de faire « tourner des bandes » autour de la bouée et de faire glisser les partages les uns le long des autres. Nous avons donc cherché un long moment, pour enfin trouver un pavage où une zone était en contact avec 6 autres, et nécessite donc 7 couleurs au minimum.



Et nous avons constaté qu'en fait, chaque zone était en contact avec 6 autres.

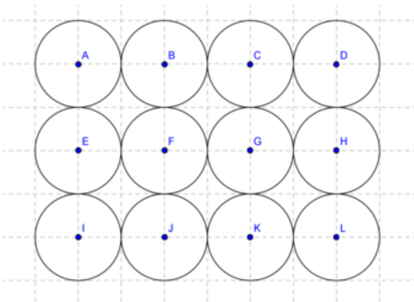
Mais nous n'avons pas réussi à trouver un pavage qui nécessite 8 couleurs et nous avons trouvé sur internet que c'était le nombre maximum de couleur nécessaire pour colorier un pavage sur un tore.

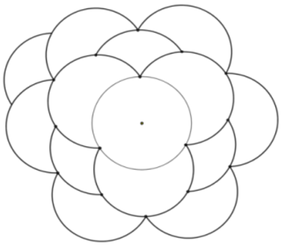
Mais là encore, la démonstration nous paraissait bien difficile... Nous avons tout de même appris au passage ce qu'était le genre d'une surface, que toutes celles sur lesquelles nous avions travaillé avant la bouée étaient de genre 0 et que la bouée était de genre 1. Peut-être un lien avec le nombre de couleurs que nous cherchions ?... Nous nous sommes dit que nous poserions la question à François Sauvageot et nous avons oublié quand il est venu. De toute façon, nous n'aurions pas eu le temps d'aborder ce point compte tenu de ce que l'on a fait après.

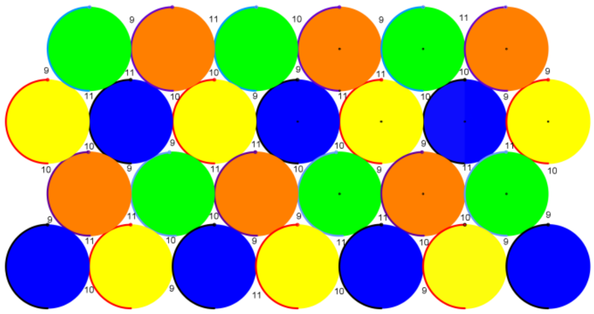
Ce sera pour une prochaine fois... peut-être la poursuite de ce travail ?

Nous sommes alors passés au deuxième problème. Naturellement, nous avons tout de suite pensé à des cercles de diamètre unité. Nous avons tenté plusieurs dispositions, toujours en cherchant celle qui nécessitait le moins de couleurs :

en voici trois :







avec 11 couleurs

La troisième était notre meilleure performance, et nous ne trouvions pas moins de onze couleurs. Nous avons alors contacté François Sauvageot par mail pour qu'il consulte notre blog et nous donne quelques pistes pour nous relancer car nous étions un peu à court d'idées.

Il nous a alors donné rendez-vous pour une rencontre et donné quelques pistes pour nous relancer en attendant que l'on se voit.

<u>premier problème</u> :

- Si nous ne pouvions pas démontrer que 4 couleurs suffisaient, nous pourrions peut-être démontrer un résultat un peu moins performant (mais quand même pas mal !) : « que 5 couleurs suffisent pour colorier n'importe quel pavage du plan, avec toujours les mêmes conditions ».
- Que, comme les décisions se prenaient toujours dans les capitales, il suffisait de colorier les capitales et de relier celles dont les pays avaient une frontière commune.

<u>second problème</u> :

- Que nous perdions beaucoup de place entre les cercles.
- Que nous n'étions peut-être pas obligés de prendre des zones qui soient de « diamètre » 1.

Nous avons alors tenté de rebondir sur ces remarques.

Ce que nous avons démontré ou tenté de démontrer :

<u>A propos du coloriage d'une carte avec cinq couleurs.</u>

En ne coloriant que les capitales et en reliant celles pour lesquelles ont avait une frontière commune, cela nous a rappelé un truc que nous avions vu sur internet en cherchant « théorème des 4 couleurs » : les graphes !

Nous avons alors un peu transformé l'énoncé pour pouvoir le présenter plus facilement à quelqu'un qui ne connaît rien des graphes :

> « Quel est le nombre de couleurs nécessaires pour colorier les capitales des pays de n'importe quelle carte de géographie, sachant que les capitales de deux pays sont reliées par une ligne téléphoniques si et seulement si les pays ont une frontière commune et qu'alors, les capitales sont de couleurs différentes ». (Pour les mers et océans, il suffit de se dire qu'on communique avec Neptune et ses représentants et ça marche...)

Nous nous sommes familiarisés avec les rudiments du vocabulaire des graphes pour communiquer plus facilement.

Nous avons remarqué que les graphes qui traduisaient notre problème avaient les propriétés suivantes :

- ils ne sont pas orientés (c'est la même ligne téléphonique qui permet de passer des messages de Paris à Berlin et de Berlin à Paris) ;
- ils sont connexes (deux capitales quelconques peuvent être mises en relation via d'autres capitales)
- ils n'ont pas de boucle (une capitale n'est pas reliée avec elle-même par téléphone) ;
- ils sont planaires, c'est-à-dire que leurs arêtes ne se croisent pas ;

Nous les appellerons : « NOS graphes »

Nos professeurs nous ont dit que l'on pouvait trouver une démonstration en nous appuyant sur trois points :

- une relation entre le nombre de sommets, de faces et d'arêtes de nos graphes
- le nombre d'arêtes maximum qu'on pouvait y trouver
- que d'un au moins des sommets il ne partait pas plus de 5 arêtes

<u>1ère étape</u> :

Nous avons conjecturé une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces avec les polyèdres que nous connaissions.

Nous avons trouvé que si A est le nombre d'arête, S le nombre de sommets et F le nombre de faces, alors S+F=A+2. Nous avons vu également que si les polyèdres n'étaient pas réguliers, cela ne changeait pas la formule.

Nous étions prêts à généraliser cette propriété à tous les polyèdres, mais un curieux a essayé avec un octaèdre étoilé et nous avons trouvé autre chose... S+F=A-4

Nous avons alors réduit notre conjecture aux polyèdres convexes et nous avons vérifié sur internet : ce nombre « 2 » est bien commun à tous les polyèdres convexes, c'est la caractéristique d'Euler.

Nous avons voulu le démontrer.

Si on déforme un polyèdre convexe pour l'aplatir, comme on l'a déjà fait pour nos coloriages, on obtient un de nos graphes.

On s'est donc dit que si on arrivait à le démontrer pour tous nos graphes, on aurait ainsi la démonstration pour les polyèdres convexes.

Comme l'un d'entre nous est en terminale, il a eu l'idée de faire la démonstration par récurrence.

Il a donc commencé en prenant le plus simple de ces graphes :$\mathcal{G}_1$ qui a $S_1=1$ sommet, $A_1=0$ arête et $F_1=1$ face, (comme s'il n'y avait que de l'eau sur Terre). On a bien $S_1+F_1=A_1+2$.

On admet donc que si un de nos graphes $\mathcal{G}_n$ a $S_n=n$ sommets, $F_n=p$ faces , il a alors $A_n=n+p-2$ arêtes. Si on ajoute *k* arêtes à ce graphe $\mathcal{G}_n$, on ajoute *k* faces. Il suffit de faire un dessin pour voir qu'à chaque arête tracée, on ajoute une face. On ne change donc rien à la relation $S_n+F_n=A_n+2$

Si maintenant on ajoute 1 sommet (on a alors un graphe $\mathcal{G}_{n+1}$), on ajoute au moins une arête, sinon le graphe n'est plus connexe ;

Disons qu'on ajoute $q\geq1$ arêtes partant du nouveau sommet. On ajoute alors $(q-1)$ faces. Il suffit de faire un dessin là encore pour voir qu'à la première arête on ne change pas le nombre de faces et qu'à partir de la deuxième, on ajoute une face à chaque nouvelle arête tracée.

Pour ce nouveau graphe $\mathcal{G}_{n+1}$, on a donc : $S_{n+1}=S_n+1$, $A_{n+1}=A_n+q$ et $F_{n+1}=F_n+q-1$

On a donc $S_{n+1}+F_{n+1}=S_n+1+F_n+q-1=S_n+F_n+q=A_n+2+q=A_n+q+2=A_{n+1}+2$

Et donc $S_{n+1}+F_{n+1}= A_{n+1}+2$

Donc, pour tous nos graphes, on a $\boxed{\mathbf{S+F=A+2}}$ donc également pour tout polyèdre convexe.

François Sauvageot nous a appris que les mathématiciens faisaient plutôt une récurrence descendante pour démontrer cela, mais on avait fait comme cela, on l'a gardé.

<u>2ème étape</u> :

Ensuite, nous avons voulu trouver le nombre maximum d'arêtes d'un de nos graphes quand il a *n* sommets. Nous avons raisonné ainsi :

Si on part d'un graphe à 3 sommets et qu'on trace toutes les arêtes possibles, on obtient un graphe qui a 3 arêtes et 2 faces.

Si on part d'un graphe à 4 sommets et qu'on trace toutes les arêtes possibles, on obtient un graphe qui a 6 arêtes et 4 faces (normal puisqu'on a ajouté 3 arêtes, donc 2 faces).

En fait, à chaque fois qu'on ajoute un sommet, on ajoute 3 arêtes et 2 faces.

Si on note u_n le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à *n* sommets, on a donc $u_{n+1}-u_n=3$.

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_3=3$.

Donc $u_n=3+3(n-3)=3n-6$

Le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à *n* sommets est donc 3*n*-6

Nous étions plutôt contents de nous, mais François Sauvageot nous a dit que nous avions le bon résultat, mais avec une erreur de raisonnement.

L'idée qu'il nous a soumise pour prendre conscience de notre erreur est la suivante : « si on veut rejoindre deux villes X et Y, est-ce parce que l'on aura pris le chemin le plus long entre chaque ville étape du trajet, que l'on aura joint les villes X et Y par le chemin le plus long ? »

C'est un peu ce que l'on a fait, puisqu'on a cherché le nombre maximum d'arêtes sur un graphe à *n* sommets en nous appuyant sur le nombre maximum d'arêtes de tous les graphes ayant moins de *n* sommets.

Nous avons donc cherché avec lui une démonstration qui s'appuie sur la caractéristique d'Euler de nos graphes.

Chaque face est entourée d'au moins 3 arêtes. Si on note F_3, F_4, F_5, ….etc, les faces entourées de 3, 4, 5, … arêtes, on a $F= F_3+ F_4+ F_5+ \ldots$. Comme deux faces sont séparées par la même arête, on a donc

$2A \geq 3F_3+ 4F_4+ 5F_5+ \ldots \geq 3F$

Or $F=A+2-S$

Donc $2A \geq 3(A+2-S)$ c'est-à-dire $\boxed{\mathbf{A \leq 3S-6}}$

<u>3ème étape</u> :

Sur tous nos graphes, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

On a raisonné par l'absurde. Si tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à 6, la somme des degrés des sommets est supérieure ou égale à 6S.

Or il y a au plus 3S-6 arêtes. Donc la somme des degrés est au plus 6S-12, Il y a une contradiction !

Donc forcément il y a au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

François Sauvageot a essayé rapidement de nous faire comprendre le principe d'une démonstration qui s'appuie sur ces 3 étapes et prouve que l'on peut colorier une carte avec seulement 5 couleurs.

Nous sommes en train d'essayer de la retrouver, mais … nous sommes encore en train…

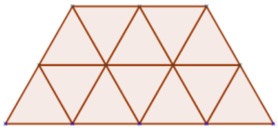
<u>A propos du coloriage d'un plan de façon que deux points distants d'une unité ne soient pas de la même couleur</u> :

<u>1ère étape</u> : le pavage

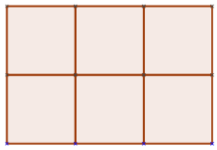
Puisque nous perdions de la place entre les cercles, pourquoi ne pas faire comme les abeilles, c'est-à-dire avec des hexagones réguliers. C'est le polygone régulier qui se rapproche le plus du cercle parmi ceux qui permettent de paver le plan. Les polygones réguliers qui ont plus de côtés ne permettent pas de paver le plan. C'est assez facile à prouver car pour paver le plan avec des polygones réguliers tous identiques, il faut que les angles au sommet soient des diviseurs de 360°.

Or, les angles aux sommets des polygones sont supérieurs ou égaux à 60° et strictement inférieurs à 180° et si on veut écrire 360 comme le produit de deux nombres entiers dont l'un est compris entre 60 et 180 (différent de 180), on n'a que 3 possibilités :

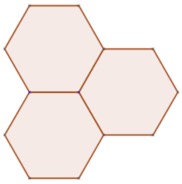
- 360 = 60 x 6 : pavage avec des triangles équilatéraux



- 360 = 90 x 4 : pavage avec des carrés



- 360 = 120 x 3 : pavage avec des hexagones



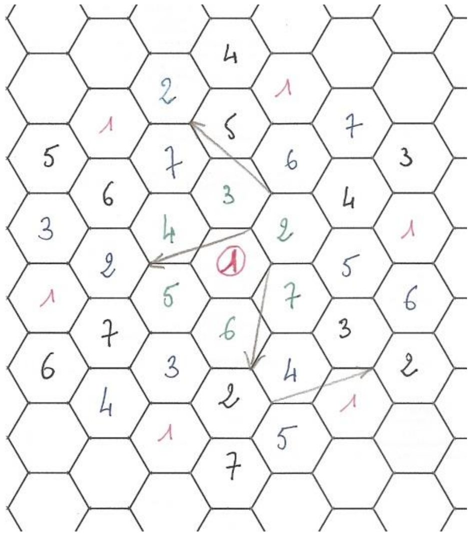
On fait donc un pavage avec des hexagones inscrits dans des cercles de diamètre un peu plus petit qu'une unité. Pourquoi pas une unité ? Parce que sinon, deux sommets opposés d'un hexagone sont de couleurs différentes et on augmente le nombre de couleurs utilisées.

2ème étape : le nombre maximal de couleurs

On a commencé par tourner autour de la première couleur, on a vu qu'il nous fallait 7 couleurs. Puis on a cherché à faire une seconde « couronne ». On a placé les deux positions possibles pour la deuxième couleur, puis on a placé les couleurs 3 à 7 en tournant dans le sens direct en sautant un hexagone entre deux couleurs.

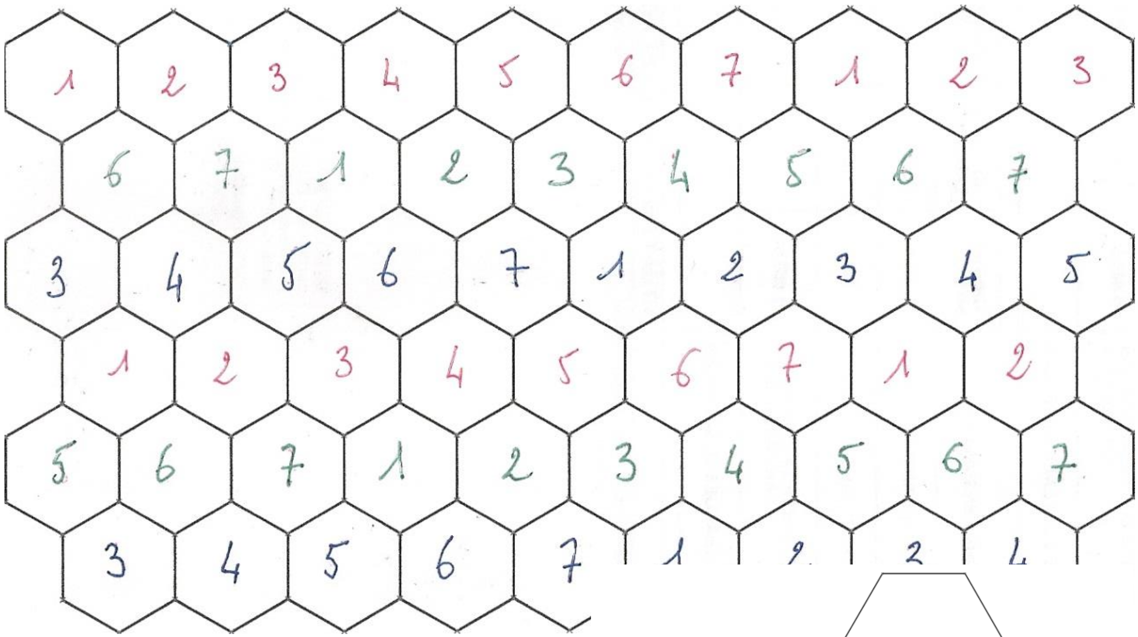
On a donc tenté une troisième « couronne »… On a replacé les 2, puis on a procédé de la même façon que précédemment, mais en sautant deux hexagones. Puis on a complété en mettant 6 fois la première couleur.

Ça fonctionnait, mais ce n'était pas très pratique, car il fallait changer de parcours à chaque « couronne ». Donc comment savoir qu'il ne faudrait pas une huitième couleur à un certain moment…

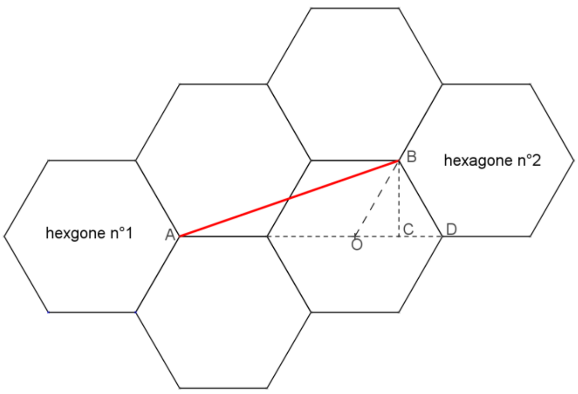


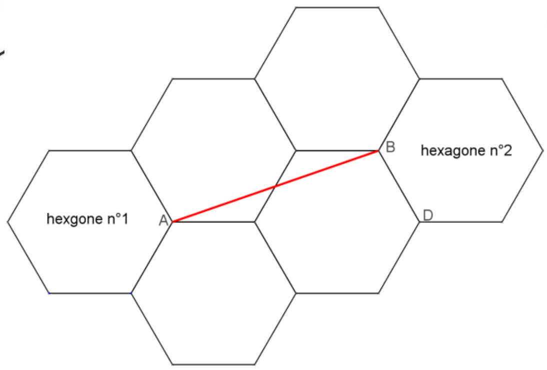
Alors on a utilisé, pour toutes les couleurs, le déplacement que l'on faisait pour placer la deuxième couleur en démarrant avec toutes les couleurs en ligne.

Et ça a donné ça !



Il restait à démontrer que la distance AB était strictement supérieure à 1 et que AB était la distance minimale entre les hexagones n°1 et n°2.





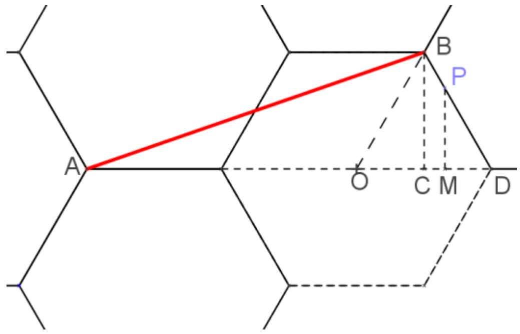
Pour la distance AB, on peut le faire avec le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. Alan l'a fait avec le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AOB.

Si d est le diamètre de l'hexagone, comme un hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux, la longueur du côté de cet hexagone est $\frac{d}{2}$. Donc AC= $\frac{5}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{5d}{4}$

De plus, comme ODB est équilatéral, BC= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}d}{4}$

Donc AB²= $\frac{25}{16} d^2 + \frac{3}{16} d^2 = \frac{7}{4} d^2$. Conclusion : AB = $\frac{\sqrt{7}}{2} d$

De plus, si on pose MD = x , d'après le théorème de Thalès dans le triangle BCD, on a : $\frac{x}{\frac{d}{4}} = \frac{\text{PM}}{\frac{\sqrt{3}d}{4}}$



C'est-à-dire PM=$\sqrt{3}\,x$. Donc si l'on pose $f(x) = \text{AP}^2$, on a :

$$f(x) = \left(d + \frac{d}{4} + \left(\frac{d}{4} - x\right)\right)^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = 4x^2 - 3dx + \frac{9d^2}{4}$$

et $\quad f'(x) = 8x - 3d$

donc AP^2 décroit de $\frac{3}{2}d$ à $\frac{\sqrt{7}}{2}d$ quand x varie de 0 à $\frac{d}{4}$.

AP ayant les mêmes variations que AP^2, la distance AP est bien minimale quand P est en B.

On veut donc à la fois $\frac{\sqrt{7}}{2}d > 1$ et d < 1. On peut donc prendre d dans $\left]\frac{2\sqrt{7}}{7}\,;1\right[$.

On a trouvé qu'il faut au plus sept couleurs pour colorier tout le plan de façon que deux points distants d'une unité ne soient pas de la même couleur.

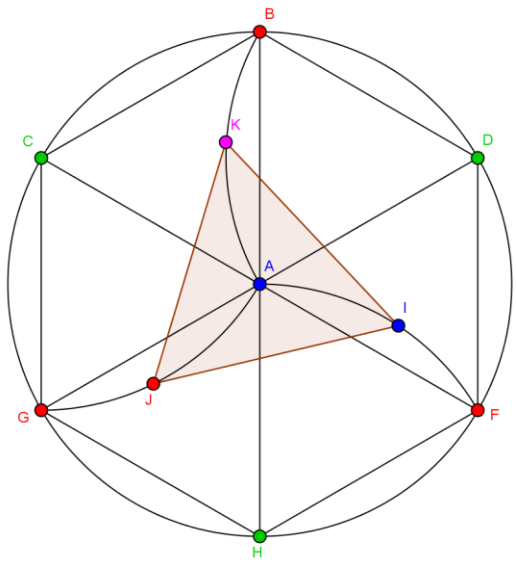
<u>3ème étape</u> : le nombre minimal de couleurs

Nous avons ensuite essayé de trouver le nombre minimum de couleurs pour faire ce coloriage

Si on choisit un point dans le plan, on est sûr de pouvoir en trouver un autre à une unité de ce point. Pour ces deux points, **il faut au moins deux couleurs**.

Ces deux points étant fixés, on est sûr d'en trouver un troisième qui soit situé à une unité des deux précédents. Il suffit de construire un triangle équilatéral. **Il faut donc au moins trois couleurs**.

Nous avons ensuite formé un hexagone avec 6 triangles équilatéraux de côtés 1 (voir ci-contre).



Nous avons conjecturé, avec l'aide de François Sauvageot, que l'on peut construire un triangle équilatéral IJK de côté 1 tel que HI=1, CJ=1 et DK=1.

Si on colorie I de la même couleur que A, alors J est de la même couleur que C. Comme D est de la même couleur que C, il faut absolument choisir une nouvelle couleur pour K.

Et de quatre !

Mais le triangle IJK existe-t-il bien ? C'est ce que nous allons tenter de faire pendant les quelques séances qu'il nous reste. Et nous espérons bien réussir…

On nous a dit qu'au-delà, le problème reste ouvert, mais… pourquoi pas !