Réalisé par le Club de Mathématiques du lycée Atlantique

Louise Agat (2$^{\text{nde}}$) ; Pauline Bétard (1$^{\text{ère}}$ L) ; Alan Branchereau (Term S) ; Enora Caron (2$^{\text{nde}}$) ; Fabien Gioria (2$^{\text{nde}}$) ; Mathilde Martin (1$^{\text{ère}}$ S) ; Titouan Meysonnier (1$^{\text{ère}}$ S) ; Franck Percot (2$^{\text{nde}}$) ; Augustin Symoens (1$^{\text{ère}}$ S)

Compte rendu de notre recherche 2013/2014

adaptée au jeu :

L'empire des couleurs

Sommaire :

Préambule :

Au début de l’année, comme tous les ans, nous avons commencé à réfléchir au thème que nous allions aborder avec le club maths.

Pour changer un peu et si cela nous intéressait, M Bonjean nous a proposé de demander à un de ses amis, le mathématicien François Sauvageot, de nous poser un problème. Cela paraissait « risqué » ! Et si nous n’étions pas inspirés ! Mais le défi était grisant, nous n’avons pas hésité bien longtemps, nous avons franchi le pas et accepté son offre.

François Sauvageot nous a alors proposé plusieurs problèmes (sur des jeux de cartes, des pliages ou des tours de magie par exemple). Ils étaient tous intéressants, mais comme nous ne nous retrouvons au club qu’une heure par semaine le mercredi après-midi et que nous avons tous plein d’autres activités, nous ne pouvions pas tout faire. Alors nous avons choisi de travailler sur un seul des sujets proposés, celui qui parlait de coloriages. Nous étions curieux de savoir quelles mathématiques il pouvait y avoir derrière cette activité que l’on pratiquait depuis que nous avions croisé un crayon de couleur…

Il y avait deux problèmes :

- 1er problème : Chercher le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les pays d’une carte de géographie. Mais pas n'importe comment ! Sur une planète sphérique, puis d’une planète cubique, tétraédrique, …polyédrique, de la forme d’une bouée, …. sans que deux pays limitrophes soient de la même couleur.
- 2ème problème : Chercher le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier un plan, de sorte que deux points distants d’une unité ne soient pas de la même couleur.

Enfin bref, des problèmes que ne peuvent se poser que des mathématiciens...

En rentrant des vacances de Toussaint, M Bonjean nous a appris que, cette année, pour participer au prix André Parent, il fallait s’appuyer sur un jeu. Comme nous avions déjà commencé à réfléchir sur nos sujets, nous nous sommes dit que nous proposerions une présentation sous une forme ludique en espérant être dans les critères du règlement. Mais en présentant nos travaux à des collégiens, nous avons eu l’idée d’un véritable jeu en les regardant s’approprier notre activité ludique sur le premier problème ! Et même de plusieurs jeux selon la difficulté que l’on recherche.

Nous n’avons pas encore réfléchi à un jeu pour le second problème, mais ce sera peut-être la surprise…

Le travail mathématique que nous avons produit répondant alors aux questions :

- Est-il possible de gagner au premier jeu ? ou d’avoir une égalité au second ?
- Quels points attribuer aux joueurs pour que le jeu ait un intérêt ?

Voici donc les trois jeux auxquels nous proposons de faire jouer les visiteurs du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques, selon leur âge, leur intérêt, leur disponibilité et leur créativité. Les règles sont suffisamment simples pour que chacun puisse faire évoluer le jeu en fonction de ses attentes.

Bien sûr ces jeux seront aussi un prétexte pour aborder les notions mathématiques qui nous permettent de répondre aux questions ci-dessus.

Notre recherche est détaillée après la description des jeux.

1er Jeu : Version basique

Matériel : des cartes de géographie ou des pavages imaginaires (en plusieurs exemplaires), des feutres ou crayons de couleurs.

But : Colorier une carte de géographie ou un pavage imaginaire avec le moins de couleur possible, en sachant que deux pays limitrophes sont coloriés de deux couleurs différentes. Dans le cas d'une carte de géographie, la mer est considérée comme le pays de Poséidon et sera coloriée comme telle. Les mers intérieures peuvent être d'une autre couleur que les océans.

Nombre de joueurs : Autant que l'on veut.
Si le joueur est seul, il doit arriver à faire le coloriage avec au maximum quatre couleurs.
S'il y a 2 joueurs ou plus,

- soit les joueurs jouent les uns contre les autres, tous avec une carte identique, éventuellement avec une contrainte de temps. Le vainqueur est celui qui a réussi avec le moins de couleurs. Une contrainte de temps permet de réduire le risque d'ex aequo.
- soit les joueurs collaborent. L'intérêt est alors de réfléchir ensemble pour colorier les pays. Les joueurs jouent évidement tous sur une même carte. On peut aussi imaginer de jouer par équipe avec une contrainte de temps.

Déroulement du jeu : Le ou les joueurs colorient la carte sans possibilité de revenir en arrière (une fois un pays colorié, il est interdit de revenir en arrière en changeant sa couleur).
Si les joueurs jouent les uns contre les autres, un coloriage avec 4 couleurs rapporte 5 points, avec 5 couleurs il rapporte 2 points et avec 6 couleurs il rapporte 1 point. Au-delà, il ne rapporte aucun point.
***Remarque** : cette manière de compter les points est encore à l'étude car nous voudrions que celui qui colorie au hasard ne risque pas de gagner celui qui réfléchit.*

Questionnement mathématique :

- déjà mené : Existe-t-il un nombre de couleur minimale ? Et quel est-il ? (conjecturé avec 4 couleurs et démontré avec 5)
- encore en cours de réflexion : dans le cas où les joueurs jouent les uns contre les autres, combien de point attribuer à chacun en fonction du nombre de couleurs utilisées, pour que le jeu ne favorise pas celui qui colorie au hasard.

2ème jeu : « Duel en couleurs » - Version avec un peu plus de stratégie à élaborer

Matériel : des cartes de géographie ou des pavages imaginaires, quatre feutres ou crayons de couleurs.

Nombre de joueurs : 2 joueurs (1 contre 1).

But : Bloquer l'adversaire dans le coloriage d'une carte de géographie ou d'un pavage imaginaire, en sachant que deux pays limitrophes sont coloriés de deux couleurs différentes, chacun ayant à sa disposition deux couleurs différentes et différentes de celles de son adversaire. Dans le cas d'une carte de géographie, la mer est considérée comme le pays de Poséidon et sera coloriée comme telle. Les mers intérieures peuvent être d'une autre couleur que les océans.

Déroulement du jeu : Les joueurs tirent au sort celui qui commence. Chacun leur tour, les joueurs colorient un pays avec une de leurs couleurs. Une fois un pays colorié, il est interdit de revenir en arrière en changeant sa couleur. Le vainqueur est celui qui bloque l'autre.
Il est possible dans cette version que les joueurs soient ex aequo, personne ne gagne mais ils ont réussi à colorier la carte avec le moins de couleur possible (4).

Questionnement mathématique :

- déjà mené : est-il possible d'aboutir à une égalité ? (conjecturé avec 4 couleurs)

3ème jeu : « L'empire des couleurs » - Version collaborative à 5 joueurs

Matériel : La carte vierge d'un empire dont on ne connait que la frontière (en plusieurs exemplaires), quatre feutres ou crayons de couleurs.

Nombre de joueurs : 5 joueurs qui changent de rôles à chaque tour

Histoire : Le grand Roi Tifapo 1er vient de mourir. Dans son testament, il charge Rylien, son neveu au second degrè, de découper la carte de son empire en territoires et d'ensuite organiser une rencontre entre ses quatre fils : Frau, Tial, Enolo et Mase (du plus jeune au plus âgé), pour qu'ils se partagent l'empire en marquant leurs territoire d'une couleur.

But de Rylien : Il doit tenter de découper l'empire de telle manière que les 4 descendants aient le plus de mal possible à colorier tous les territoires avec leurs quatre couleurs et donc récupérer la 5ème part de l'empire constituée du plus grand nombre possible de territoires.

But des quatre fils : Ils souhaitent acquérir le plus possible de territoires et en laisser le moins possible à Rylien. Ils ont donc à la fois intérêt à collaborer pour laisser le moins possible de territoires à Rylien et à bloquer leurs frères (en se ménageant des possibilités de coloriage) pour avoir plus de territoires que les autres.

Déroulement : Rylien partage le territoire et donne la carte aux quatre fils. Ceux-ci reçoivent chacun une couleur différente et colorient, chacun leur tour du plus jeune au plus âgé, un territoire sans que deux territoires ayant une frontière commune (non réduite à un point) soient de la même couleur. Une fois une couleur posée, ils n'ont plus le droit de la changer. Quand un des fils ne peut plus colorier de territoire, il s'arrête et les autres continuent s'ils le peuvent. Rylien, comme neveu et exécuteur testamentaire, recevra sa part de l'empire : tous les territoires que les quatre frères n'auront pas réussi à colorier avec cette règle. Pendant la phase de coloriage, Rylien surveille que les frères ne trichent pas à ses dépens.
Quand tous les frères sont bloqués, on marque les points et Rylien prend la place de Frau, Frau celle de Tial, Tial celle d'Enolo, Enolo celle de Mase et Mase celle de Rylien et on recommence. Ainsi, chaque joueur occupera tous les rôles, ce qui équilibre les chances.

Marquage : (non définitif car encore en cours d'étude), il y a deux marquages possibles :

- Soit les quatre frères ont réussi à colorier tous les territoires et ils marquent deux points par territoire conquis. Rylien ne marque rien.
- Soit il reste des territoires pour Rylien et il marque 1 point par territoire restant. Les autres marquent 1 point par territoire gagné sur celui qui en a le moins.
  Exemple : Frau a 5 territoires, Tial en a 7, Enolo en a 8 et Mase en a 11. Alors Frau marque 0 point, Tial marque 7-5=2 points, Enolo marque 8-5=3 points et Mase marque 11-5=6 points.

Questionnement mathématique :

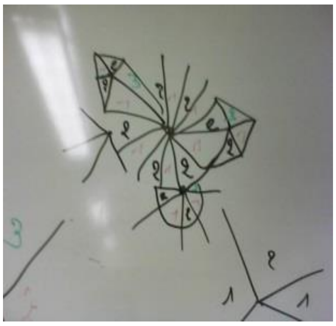
- déjà mené : Les quatre frères peuvent-ils ne laisser aucun territoire à Rylien ? (conjecturé avec 4 couleurs)
- encore en cours de réflexion : combien de point attribuer à chacun en fonction de la situation pour que le jeu ne favorise pas celui qui colorie au hasard.

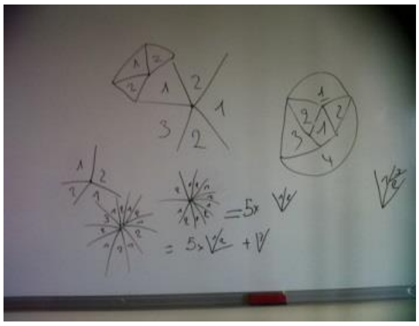
Histoire de la recherche :

Pour commencer, nous avons simplement essayé de colorier avec le moins de couleurs possible, les départements de la région Pays de la Loire, les départements ou encore les régions françaises, sans que deux zones adjacentes n'aient la même couleur. Puis une carte d'Europe.

Comme nous avons senti que nous serions vite à court de cartes, nous avons testé avec des formes plus géométriques ou artistiques : des pavages. Toujours en essayant de les colorier avec le moins de couleurs possible. Nous avons conjecturé, à partir de ces essais que la forme et la taille des zones n'avait pas d'influence sur les couleurs, et qu'il fallait surtout s'intéresser au nombre de frontières avec les autres zones.

Mais nous avions parfois l'impression d'être revenus en maternelle avec nos crayons de couleurs, alors nous avons remplacé les couleurs par des nombres car c'était plus rapide.



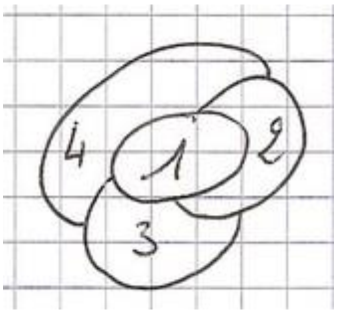


Revenant à nos cartes de géographie, et avec nos remarques sur les pavages, nous avons d'abord concentré note attention sur les points de concours des frontières. A un nombre pair de frontières concourantes correspondait deux couleurs. Et à un nombre impair correspondaient trois couleurs. (Voir photos du tableau)

Nous avons vite vu que cela ne nous menait pas très loin et que cela ne correspondait à rien dans la réalité (ce n'est peut-être pas le plus important...), mais nous avons pensé, grâce à cela que nous pouvions remplacer la frontière par des segments de droite. Premier pas vers la recherche d'un modèle…

Nous avons alors commencé à construire nos propres pavages en essayant de les faire les plus compliqués possibles, car on pensait qu'il y avait une corrélation entre la complexité du pavage et le nombre de couleurs (plus c'est complexe, plus il y a de couleurs). Mais quand nous pensions avoir trouvé une solution avec cinq couleurs ou plus, il y en avait toujours un ou une pour le faire avec quatre ou moins de quatre. Nous avons essayé de faire des dessins, tous plus compliqués les uns que les autres, pour trouver un pavage qui nécessiterait 5 couleurs. Peine perdue !

Nous avons alors émis deux hypothèses :

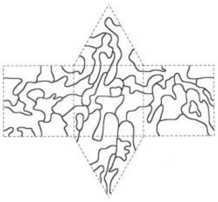


- quatre était peut-être ce nombre de couleurs dont nous avions besoin ;
- pour arriver à quatre, il fallait tout de même poser une condition sur la forme des pays : ils devaient être d'un seul morceau ! Sinon, en ajoutant des contraintes, on pouvait augmenter le nombre de couleurs autant qu'on le voulait.

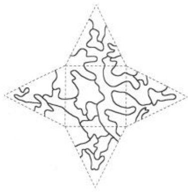
Donc, au lieu de chercher à ajouter une cinquième couleur, nous avons tenté de trouver un argument pour prouver que l'on n'en avait jamais besoin. Que quatre suffisaient. Nous avons trouvé ce dessin illustrant cette conjecture :

En effet, pour ajouter une cinquième couleur, il faudrait que celle-ci soit en contact avec les quatre autres, or cela ne paraît pas possible.

A ce stade, M Bonjean et M Perez nous ont expliqué que cette propriété avait un nom : le théorème des quatre couleurs. On s'est alors dit : « Super ! Un théorème, on le démontre ? ». Mais là encore ils nous ont expliqué que cette démonstration avait une histoire, 1ère démonstration nécessitant un ordinateur et patati et patata…, que nous n'étions pas au bout de nos peines et qu'ils ne nous seraient d'aucun secours pour tenter de la comprendre ensemble si nous en trouvions trace quelque part ! Nous pensions pourtant avoir un argument de poids avec notre petit dessin !



Alors pourquoi nous poser un tel problème ? Il fallait peut-être continuer dans l'escalade des défis ?



Nous sommes revenus aux questions posées par François Sauvageot et nous nous sommes dit que si on « sortait » du plan (sphère, polyèdres), nous trouverions peut-être plus quelque chose à notre portée…

Nous avons donc tenté de colorier des patrons de polyèdres (pavé, pyramide et prisme), la difficulté étant que le polyèdre puisse être reformé, et que les contraintes de couleurs soient toujours respectées.

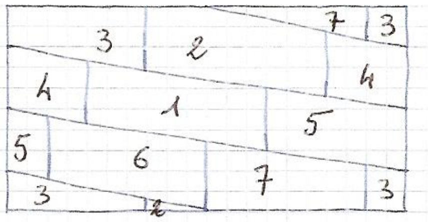
Mais là encore nous avons remarqué que sur un plan et sur les polyèdres (ceux que nous avions essayés en tout cas), quatre couleurs semblaient suffire. Comme sur la sphère d'ailleurs car, puisque la forme des pays n'a pas d'importance, pourquoi ne pas considérer que la sphère est un ballon qu'on peut « déformer » pour « l'aplatir »… comme sur certaines cartes circulaires qui sont un peu faites comme ça : le Pôle Nord est un point et le Pôle Sud fait le tour de la carte.

Image extraite du site :Images des maths

Nous nous sommes donc attaqués à un solide non convexe, la bouée, pour voir si le résultat serait le même. Première difficulté : le patron d'une bouée est plutôt difficile à réaliser... Mais puisque nous avions « déformé » la sphère, pourquoi ne pas déformer la bouée ? Nous avons à ce propos appris que le nom mathématique d'une bouée était un tore, car MM Bonjean et Perez faisaient souvent le lapsus en parlant entre eux...

Nous avons donc cherché différents découpages, et finalement, nous nous sommes rendu compte qu'il suffisait de prendre un rectangle dont les côtés opposés se rejoignent deux à deux. Nous avons remarqué que les zones se trouvant dans les quatre angles devaient être de la même couleur, ainsi que les zones qui se trouvaient en face l'une de l'autre sur les côtés opposés du rectangle. Par facile à dire mais François Sauvageot, dans un mail, a trouvé une formule simple : « le caractère pac-man de la bouée ».

Avec ces contraintes, nous avons découpé notre bouée et très vite nous avons vu que quatre couleurs ne suffisait pas. Il était assez simple de trouver de pavages qui nécessitent cinq couleurs. Mais nous avions la sensation que ça n'allait pas s'arrêter là. Notre idée était de faire « tourner des bandes » autour de la bouée et de faire glisser ces « tranches » ainsi délimitées les unes le long des autres. Nous avons donc cherché un long moment, pour enfin trouver un pavage où une zone était en contact avec six autres, et nécessitant donc sept couleurs au minimum.



Et nous avons constaté qu'en fait, chaque zone était en contact avec six autres.

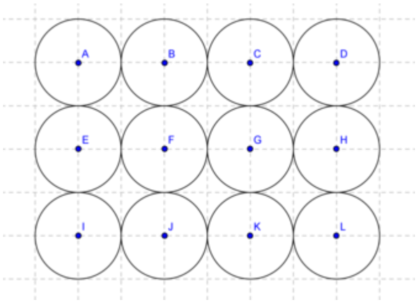
Mais nous n'avons pas réussi à trouver un pavage qui nécessite huit couleurs. Non avons ensuite trouvé sur internet que c'était le nombre maximum de couleur nécessaire pour colorier un pavage sur un tore.

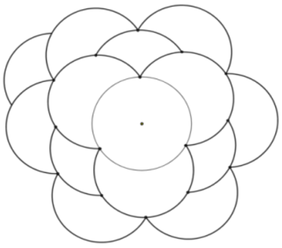
Mais là encore, la démonstration nous paraissait bien difficile... Nous avons tout de même appris au passage ce qu'était le genre d'une surface, que toutes celles sur lesquelles nous avions travaillé avant la bouée étaient de genre 0 et que la bouée était de genre 1. Peut-être un lien avec le nombre de couleurs que nous cherchions ?... Nous nous sommes dit que nous poserions la question à François Sauvageot et nous avons d'ailleurs oublié quand il est venu. Mais de toute façon, nous n'aurions pas eu le temps d'aborder ce point compte tenu de ce que l'on a fait après.

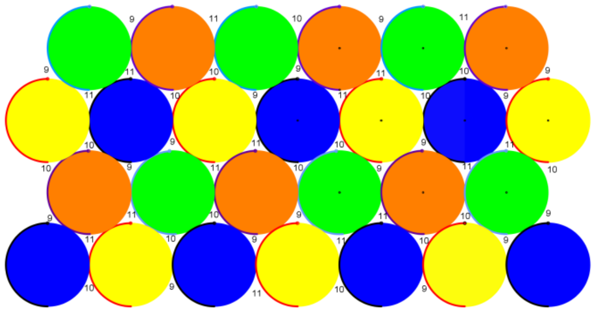
Ce sera pour une prochaine fois... peut-être la poursuite de ce travail ?

Nous sommes alors passés au deuxième problème, le coloriage du plan de sorte que deux points distants d'une unité soient de couleurs différentes. Naturellement, nous avons tout de suite pensé à des cercles de diamètre une unité. Nous avons tenté plusieurs dispositions, toujours en cherchant celle qui nécessitait le moins de couleurs :

en voici trois :







avec 11 couleurs

La troisième était notre meilleure performance, et nous ne trouvions pas moins de onze couleurs. Cela nous paraissait beaucoup. Nous avons alors contacté François Sauvageot par mail pour qu'il consulte notre blog et nous donne quelques pistes pour nous relancer car nous étions un peu à court d'idées.

Il nous a alors donné rendez-vous pour une rencontre et donné quelques pistes pour nous relancer en attendant que l'on se voit.

<u>Pour notre premier problème</u> :

- Si nous ne pouvions pas démontrer que quatre couleurs suffisaient, nous pourrions peut-être démontrer un résultat un peu moins performant (mais quand même pas mal) : « que cinq couleurs suffisent pour colorier n'importe quel pavage du plan, avec toujours les mêmes conditions ».
- Que, comme les décisions se prenaient toujours dans les capitales, il suffisait de colorier les capitales et de relier celles dont les pays avaient une frontière commune.

<u>Pour notre second problème</u> :

- Que nous perdions beaucoup de place entre les cercles.
- Que nous n'étions peut-être pas obligés de prendre des zones qui soient de « diamètre » 1.

Nous avons alors tenté de rebondir sur ces remarques.

Ce que nous avons démontré ou tenté de démontrer :

A propos du coloriage d'une carte avec cinq couleurs.

En ne coloriant que les capitales et en reliant celles pour lesquelles ont avait une frontière commune, cela nous a rappelé un truc que nous avions vu sur internet en cherchant « théorème des quatre couleurs » (quand on voulait se convaincre que la démonstration n'était pas à notre portée) : les graphes !

Nous avons alors un peu transformé l'énoncé de notre problème pour pouvoir le présenter plus facilement à quelqu'un qui ne connaît rien des graphes :

> « Quel est le nombre de couleurs nécessaires pour colorier les capitales des pays de n'importe quelle carte de géographie, sachant que les capitales de deux pays sont reliées par une ligne téléphoniques si et seulement si les pays ont une frontière commune et qu'alors, les capitales sont de couleurs différentes ». (Pour les mers et océans, il suffit de se dire qu'on communique avec Nepture et ses représentants et ça marche...)

Nous nous sommes familiarisés avec les rudiments du vocabulaire des graphes pour communiquer plus facilement.

Nous avons remarqué que les graphes qui traduisaient notre problème avaient les propriétés suivantes :

- ils ne sont pas orientés (c'est la même ligne téléphonique qui permet de passer des messages de Paris à Berlin et de Berlin à Paris) ;
- ils sont connexes (deux capitales quelconques peuvent être mises en relation via d'autres capitales)
- ils n'ont pas de boucle (une capitale n'est pas reliée avec elle-même par téléphone) ;
- ils sont planaires, c'est-à-dire que leurs arêtes ne se croisent pas (deux pays qui se touchent par un point n'ont pas de frontière commune) ;

1ère étape :

Sur les conseils de nos professeurs, nous avons cherché une relation, commune à tous les polyèdres, entre le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre de faces. En fait nous avons cherché avec les polyèdres que nous connaissions (polyèdres de Platon, parallélépipèdes, pyramides, prismes).

Nous avons trouvé que si A est le nombre d'arête, S le nombre de sommets et F le nombre de faces, alors $S+F=A+2$. Nous avons vu également que si les polyèdres n'étaient pas réguliers, cela ne changeait pas la formule.

Nous étions prêts à généraliser cette propriété à tous les polyèdres, mais un de nos professeurs nous a dit d'essayer avec un octaèdre étoilé et nous avons trouvé autre chose... $S+F=A-4$

Nous avons alors conjecturé que cette relation n'était valable que pour les polyèdres convexes et nous avons vérifié sur internet : ce nombre « 2 » est bien commun à tous les polyèdres convexes, c'est la caractéristique d'Euler.

Nous avons voulu le démontrer et, enfin quelque chose qui ne paraissait pas inaccessible…

Si on déforme un polyèdre convexe pour l'aplatir, comme on l'a déjà fait pour nos coloriages, on obtient un graphe qui a les propriétés de ceux qui traduisent notre problème.

On s'est donc dit qu'on allait essayer de le démontrer pour tous nos graphes et on aurait ainsi, du même coup, la démonstration pour les polyèdres convexes.

Comme l'un d'entre nous est en terminale, il a eu l'idée de faire la démonstration par récurrence.

Il a donc commencé en prenant le plus simple de ces graphes :$\mathcal{G}_1$ qui a S_1=1 sommet, A_1=0 arête et F_1=1 face, (comme s'il n'y avait que de l'eau sur Terre et que Neptune règne en seul maître). On a bien $S_1+F_1=A_1+2$.

On admet donc que si un graphe $\mathcal{G}_n$ traduisant un de nos coloriages a $S_n = n$ sommets, $F_n=p$ faces , il a alors $A_n=n+p-2$ arêtes. Si on ajoute k arêtes à ce graphe $\mathcal{G}_n$, on ajoute k faces. Il suffit de faire un dessin pour voir qu'à chaque arête tracée, on ajoute une face. On ne change donc rien à la relation $S_n+F_n=A_n+2$

Si maintenant on ajoute 1 sommet (on a alors un graphe $\mathcal{G}_{n+1}$), on ajoute au moins une arête, sinon le graphe n'est plus connexe ;

Disons qu'on ajoute $q\geq1$ arêtes partant du nouveau sommet. On ajoute alors (q-1) faces. Il suffit de faire un dessin là encore pour voir qu'à la première arête on ne change pas le nombre de faces et qu'à partir de la deuxième, on ajoute une face à chaque nouvelle arête tracée.

Pour ce nouveau graphe $\mathcal{G}_{n+1}$, on a donc : $S_{n+1}= S_n+1$, $A_{n+1}= A_n+q$ et $F_{n+1}= F_n+q-1$

On a donc $S_{n+1}+F_{n+1}= S_n+1+F_n+q-1= S_n+F_n+q = A_n+2 +q = A_n+q +2 = A_{n+1}+2$

Et donc $S_{n+1}+F_{n+1}= A_{n+1}+2$

Donc, pour tout graphe planaire, on a $\boxed{\mathbf{S+F=A+2}}$ donc également pour tout polyèdre convexe.

Là, on était plutôt contents de nous, même si on a appris après par François Sauvageot que les mathématiciens faisaient plutôt une récurrence descendante pour démontrer cela.

2ème étape :

Ensuite, nous avons voulu trouver le nombre maximum d'arêtes d'un graphe (toujours ceux qui nous intéressent) à n sommets.

Nous avons raisonné ainsi :

Si on part d'un graphe à 3 sommets et qu'on trace toutes les arêtes possibles (graphe complet), on obtient un graphe qui a 3 arêtes et 2 faces.

Si on part d'un graphe à 4 sommets et qu'on trace toutes les arêtes possibles, on obtient un graphe qui a 6 arêtes et 4 faces (normal puisqu'on a ajouté 3 arêtes, donc 2 faces).

Si on part d'un graphe à 5 sommets et qu'on trace toutes les arêtes possibles, on obtient un graphe qui a 9 arêtes et 6 faces.

En fait, à chaque fois, on ajoute 3 arêtes et 2 faces.

Si on note u_n le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à n sommets, on a donc $u_{n+1}-u_n=3$.

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme u_3=3.

Donc $u_n= 3+3(n-3)=3n-6$

Le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à *n* sommets est donc 3*n*-6

Là aussi nous étions plutôt contents, mais François Sauvageot nous a dit que nous avions le bon résultat, mais avec une erreur de raisonnement.

L'idée qu'il nous a soumise pour prendre conscience de notre erreur est la suivante : « si on veut rejoindre deux villes X et Y, est-ce parce que l'on aura pris le chemin le plus long entre chaque ville étape du trajet que l'on aura joint les villes X et Y par le chemin le plus long ? »

C'est effectivement un peu ce que l'on a fait, puisque l'on a cherché le nombre maximum d'arêtes sur un graphe à n sommets en nous appuyant sur le nombre maximum d'arêtes de tous les graphes ayant moins de n sommets.

Nous avons donc cherché avec lui une démonstration qui s'appuie sur la caractéristique d'Euler de nos graphes.

Chaque face est entourée d'au moins 3 arêtes. Si on note F_3, F_4, F_5, ….etc, les faces entourée de 3, 4, 5, … arêtes, on a $F= F_3+ F_4+ F_5+ ….$

On a donc $2A \geq 3F_3+ 4F_4+ 5F_5+ …. \geq 3F$

Or $F=A+2-S$

Donc $2A \geq 3(A+2-S)$ c'est-à-dire $\boxed{\mathbf{A \leq 3S-6}}$

<u>3ème étape</u> :

François Sauvageot a essayé de nous faire comprendre le principe d'une démonstration qui s'appuie sur nos deux premières étapes et prouve que l'on peut colorier une carte avec cinq seulement couleurs.

Nous sommes en train d'essayer de digérer et de retrouver cette démonstration, mais … nous sommes encore en train…

Nous avons cependant compris le point de départ :

Sur tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

En effet, s'il y a au plus 3S-6 arêtes, c'est-à-dire (3 fois le nombre de capitales - 6) liaisons téléphoniques, il y a au plus 6S-12 combinés téléphoniques (chaque téléphone ne fonctionnant que sur une ligne). Or si toutes les capitales possédaient au moins 6 combinés, le nombre de combinés serait supérieur à 6S (6 fois le nombre de lignes). Comme il n'y a au plus que 6S-12 combinés, forcément il y au moins une capitale qui possède 5 combinés ou moins.

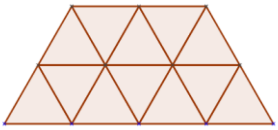
A propos du coloriage d'un plan de façon que deux points distants d'une unité ne soient pas de la même couleur :

1ère étape :

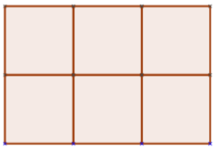
Puisque nous perdions de la place entre les cercles, pourquoi ne pas faire comme les abeilles, c'est-à-dire paver le plan avec des hexagones réguliers. C'est le polygone régulier qui se rapproche le plus du cercle parmi ceux qui permettent de paver le plan. Les polygones réguliers qui ont plus de côtés ne permettent pas de paver le plan. C'est assez facile à prouver car pour paver le plan avec des polygones réguliers tous identiques, il faut que les angles au sommet soient des diviseurs de 360°.

Or, les angles aux sommets des polygones sont supérieurs ou égaux à 60° et strictement inférieurs à 180° et si on veut écrire 360 comme le produit de deux nombres entiers dont l'un est compris entre 60 et 180 (différent de 180), on a les possibilités suivantes :

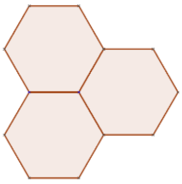
- 360 = 60 x 6 : pavage avec des triangles équilatéraux



- 360 = 90 x 4 : pavage avec des carrés



- 360 = 120 x 3 : pavage avec des hexagones

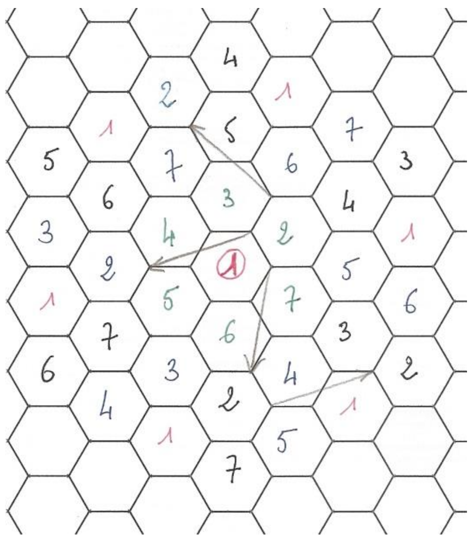


et c'est tout !

On fait donc un pavage avec des hexagones inscrits dans des cercles de diamètre un peu plus petit qu'une unité. Pourquoi pas une unité ? Parce que sinon, deux sommets opposés d'un hexagone sont de couleurs différentes et on augmente le nombre de couleurs utilisées.

Pour commencer on a pris 0,9 unité, mais ensuite on a cherché quelle était le diamètre minimum que devaient avoir ces hexagones.

2ème étape : le coloriage



On a commencé par tourner autour de la première couleur, on a vu qu'il nous fallait 7 couleurs. Puis on a cherché à faire une seconde « couronne ». On a placé les deux positions possibles pour la deuxième couleur, puis on a placé les couleurs 3 à 7 en tournant dans le sens direct en sautant un hexagone entre deux couleurs.

Ça fonctionnait ! On a donc tenté une troisième « couronne »… On a replacé les 2, puis on a procédé de la même façon que précédemment, mais en sautant deux hexagone. Puis on a complété en mettant six fois la première couleur.

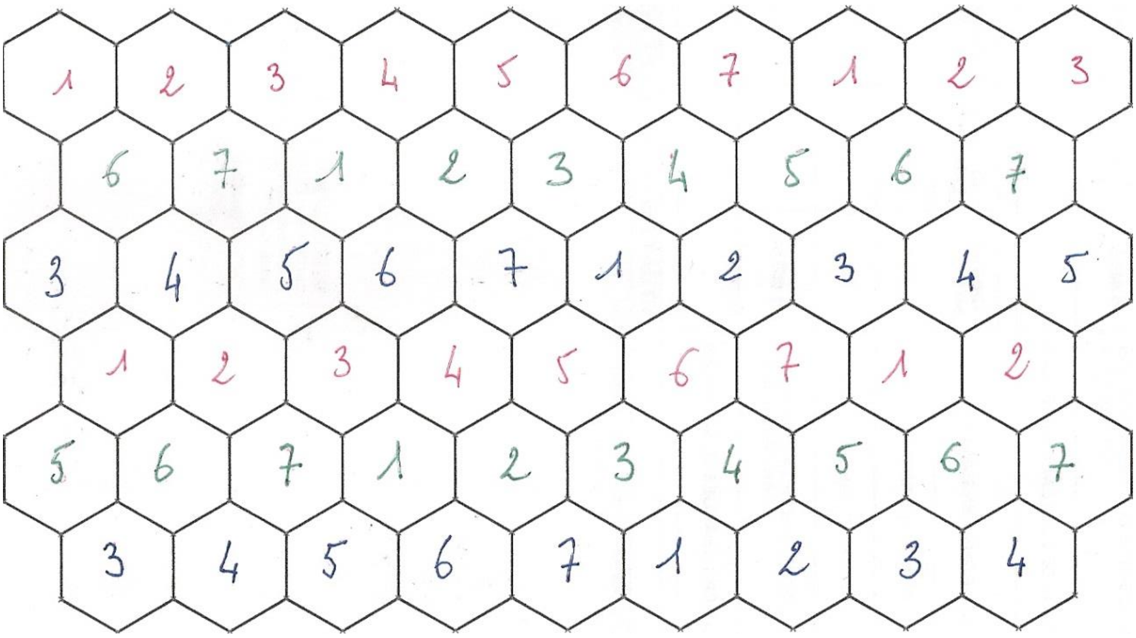
Ça fonctionnait encore, mais ce n'était pas très pratique, car il fallait changer de parcours à chaque « couronne ». Donc comment savoir qu'il ne faudrait pas une huitième couleur à un certain moment…

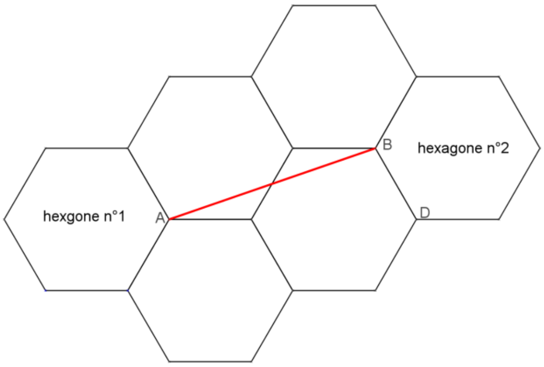
Alors on a utilisé, pour toutes les couleurs, le déplacement que l'on faisait pour placer la deuxième couleur en démarrant avec toutes les couleurs en ligne.

Et ça a donné ça !

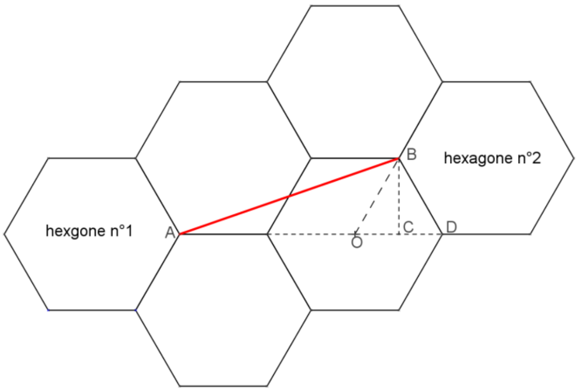
Carrément plus simple…

Et répétable à l'infini dans toutes les directions…





Il reste à démontrer toutefois que la distance AB est strictement supérieure à 1 et que AB est la distance minimale entre les hexagones n°1 et n°2.



Pour la distance AB, on peut le faire avec le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, ou bien avec le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AOB.

Avec le théorème de Pythagore :

Si d est le diamètre de l'hexagone, comme un hexagone est formé de six triangles équilatéraux, la longueur du côté de cet hexagone est $\frac{d}{2}$. Donc AC= $\frac{5}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{5d}{4}$

De plus, comme ODB est équilatéral, BC= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}d}{4}$

Donc AB²= $\frac{25}{16} d^2 + \frac{3}{16} d^2 = \frac{7}{4} d^2$. Conclusion : AB = $\frac{\sqrt{7}}{2} d$

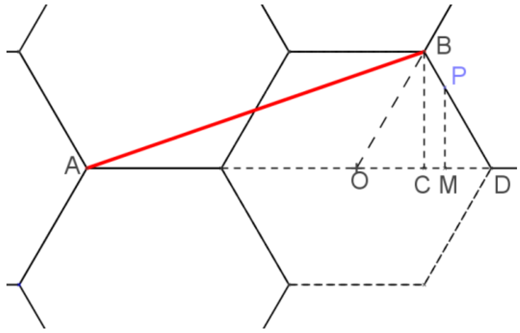
Avec le théorème d'Al-Kashi :

L'angle $\widehat{AOB}$ mesure 120° donc

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times cos120° = d^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \times d \times \frac{d}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7d^2}{4}$$

Soit encore AB = $\frac{\sqrt{7}}{2} d$

De plus, si on pose MD = x , d'après le théorème de Thalès dans le triangle BCD, on a : $\dfrac{x}{\frac{d}{4}} = \dfrac{\text{PM}}{\frac{\sqrt{3}d}{4}}$



C'est-à-dire PM=$\sqrt{3}\,x$. Donc si l'on pose $f(x) = \text{AP}^2$, on a :

$$f(x) = \left(d + \frac{d}{4} + \left(\frac{d}{4} - x\right)\right)^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = 4x^2 - 3dx + \frac{9d^2}{4}$$

et $f'(x) = 8x - 3d$

donc

x	0	$\frac{d}{4}$
$f'(x)$	Négatif	
$f(x)$	$\frac{3}{2}d$ ↘	$\frac{\sqrt{7}}{2}d$

AP^2 décroit donc de $\frac{3}{2}d$ à $\frac{\sqrt{7}}{2}d$ quand x varie de 0 à $\frac{d}{4}$.

AP ayant les mêmes variations que AP^2, la distance AP est bien minimale quand P est en B.

Si d=0,9 , on a bien $\frac{\sqrt{7}}{2}d > 1{,}19$ unité

En fait on veut à la fois $\frac{\sqrt{7}}{2}d > 1$ et d < 1. On peut donc prendre d dans l'intervalle $\left]\frac{2\sqrt{7}}{7} ; 1\right[$.

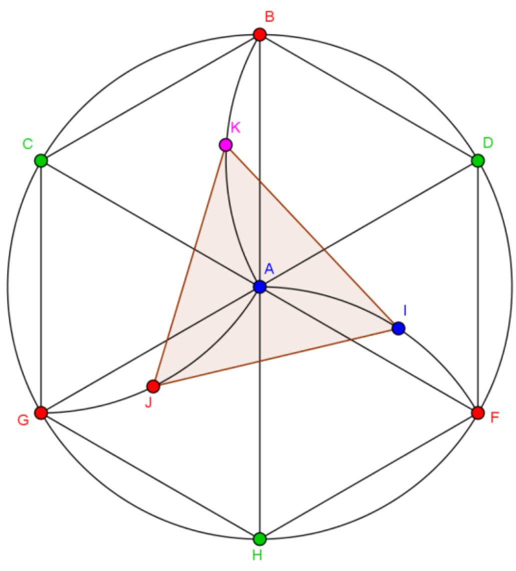
Conclusion : On a trouvé qu'il faut au plus sept couleurs pour colorier tout le plan de façon que deux points distants d'une unité ne soient pas de la même couleur.

Nous avons ensuite essayé de trouver le nombre minimum de couleurs pour faire ce coloriage

Si on choisit un point dans le plan, on est sûr de pouvoir en trouver un autre à une unité de ce point. Pour ces deux points, **il faut au moins deux couleurs**.

Mais ces deux points étant fixés, on est également sur d'en trouver un troisième qui soit situé à une unité des deux précédents. Il suffit de construire un triangle équilatéral. **Il faut donc au moins trois couleurs** puisque chacun est à une distance unité des deux autres.

Nous avons ensuite formé un hexagone avec six triangles équilatéraux de côtés 1 de la façon suivante.



Nous avons conjecturé, avec l'aide de François Sauvageot, que l'on peut construire un triangle équilatéral IJK de côté 1 tel que HI=1, CJ=1 et DK=1.

Si on colorie I de la même couleur que A (on a le choix entre la couleur de A et celle de F), alors J est de la même couleur que C. Comme D est de la même couleur que C, il faut absolument choisir une nouvelle couleur pour K.

Et de quatre !

Mais il nous a demandé de démontrer que le triangle IJK existe bien. Ce que nous allons tenter de faire pendant les quelques séances qu'il nous reste.