

Jeu à deux joueurs :

n (entier naturel) est un nombre de jetons identiques supérieur ou égal à 2.

Une configuration est la répartition de ces n jetons en un certain nombre de piles.

Par exemple : pour $n = 4$, les configurations possibles sont les suivantes :

[4], [3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1, 1, 1, 1].

En partant d'une configuration de départ, les joueurs jouent à tour de rôle et peuvent :

- soit diviser une pile en m piles de même taille ($m \geq 2$ entier) ;
- soit fusionner deux piles de tailles différentes.

Le joueur n'ayant plus de coup possible a perdu.

On pose les définitions suivantes :

- Une configuration c est dite de longueur l si, partant de celle-ci, un des deux joueurs est sûr de pouvoir gagner en l coups (on compte les coups des deux joueurs) et si pour tout $k < l$, son adversaire peut l'empêcher de gagner en k coups. On note alors $L(c) = l$.

Exemples : dans le cas $n = 4$:

- En partant de la configuration [3, 1], le joueur qui commence (on l'appellera J1) est sûr de pouvoir gagner en 1 coup. En effet, s'il joue [3, 1] \rightarrow [1, 1, 1, 1], l'autre joueur (qu'on appellera J2) n'a plus de coup possible, et J1 a donc gagné. Conclusion, $L([3, 1]) = 1$.
- En partant de [2, 2], J2 est sûr de pouvoir gagner en 2 coups. En effet, J1 n'a qu'un seul coup possible : [2, 2] \rightarrow [2, 1, 1]. J2 peut ensuite jouer [2, 1, 1] \rightarrow [1, 1, 1, 1] et J1 a alors perdu. Conclusion, $L([2, 2]) = 2$.
- Une configuration c est dite de longueur finie s'il existe un $l \in \mathbb{N}$ telle qu'elle soit de longueur l . Sinon, on pose $L(c) = \infty$.
- La longueur du jeu est définie comme étant la plus grande longueur parmi ses configurations de longueur finie.

Questions :

1. Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, pour quels valeurs de n existe-il des parties qui durent indéfiniment ?
2. Trouver toutes les configurations de longueur 1.
3. Caractériser les valeurs de n pour lesquels le jeu à n jetons est de longueur supérieure ou égale à :
 - a) 2
 - b) 4
4. Étudier la longueur du jeu à n jetons (on pourra commencer par étudier les petites valeurs de n).
5. Pour quelles valeurs de n les configurations du jeu à n jetons sont-elles toutes de longueur finie ?
6. Envisager un jeu à plus de deux joueurs.

On a commencé par jouer pour s'approprier le jeu. Puis on a cherché à comprendre le déroulement d'une partie en énumérant les stratégies possibles à chaque étape.

On a essayé plusieurs présentations, mais nous avons un problème avec les coups qui revenaient à des configurations antérieures. Notre chercheur nous a proposé de présenter les déroulements possibles d'un jeu en utilisant des graphes. Nous avons commencé à le faire mais, très vite (pour des valeurs de n relativement petites), nous nous sommes aperçus que ces graphes devenaient très compliqués à représenter.

Nous sommes alors revenus aux questions qui nous avaient été posée en les reprenant dans l'ordre. Elles devaient avoir une utilité...

Remarque préliminaire :

- Quelle que soit la valeur de n ($n \geq 2$) la configuration qui signe la fin du jeu est $[1, 1, \dots, 1]$ (n tas de 1 jeton). Nous ne partirons donc jamais d'une telle configuration dont la longueur est 0.
- Les configurations de rang impair sont gagnantes et celles de rang pair sont perdantes pour le joueur qui les joue.

Question 1 : Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, pour quels valeurs de n existe-il des parties qui durent indéfiniment ?

Pour $n = 2$: le seul coup possible est de faire 2 tas de 1 jetons. Le jeu se termine donc en 1 coup sans que le J1 ai eu de choix de stratégie. Au passage : la longueur du jeu à 2 jetons est 1.

Pour $n = 3$: les deux configurations de départ sont $[3]$ et $[2, 1]$.

- $[3] \rightarrow [1, 1, 1]$
- $[2, 1] \rightarrow [3]$ (puisqu'ils veulent faire durer !) $\rightarrow [1, 1, 1]$
Dans les deux cas, il n'est pas possible de faire durer le jeu indéfiniment.
Au passage : la longueur du jeu à 3 jetons est 1 (car le joueur qui doit jouer avec $[2, 1]$ n'a aucune raison de faire $[3]$ puisqu'il gagne en un coup)

Pour $n = 4$: les configurations possibles sont $[4]$, $[3, 1]$, $[2, 2]$, $[2, 1, 1]$, $[1, 1, 1, 1]$

Or on peut former la succession de coups suivante :

$[4] \rightarrow [2, 2] \rightarrow [2, 1, 1] \rightarrow [3, 1] \rightarrow [4] \rightarrow [2, 2] \rightarrow [2, 1, 1] \rightarrow [3, 1] \rightarrow [4] \rightarrow [2, 2] \rightarrow [2, 1, 1] \rightarrow \dots$
Puisqu'on a dit qu'on ne partait jamais de d'une configuration avec uniquement des tas de 1 jeton, on a trouvé un cycle que l'on peut faire durer indéfiniment si aucun des joueur ne cherche à gagner.

Pour $n > 4$: Il suffit aux joueurs de partir d'une configuration qui leur permette d'atteindre la configuration $[4, 1, 1, \dots, 1]$. Ainsi, il leur suffit de ne plus toucher aux $n - 4$ tas de 1 jeton et de jouer avec les 4 jetons restants.

Conclusion : Tous les jeux à 5 jetons ou plus contiennent des configurations qui permettent à deux joueurs qui ne cherchent pas à gagner de jouer indéfiniment.

Mais attention, toutes les configurations à n jetons avec $n \geq 5$ ne permettent pas de jouer indéfiniment ! par exemple, $L([5]) = 1$, donc le jeu s'arrête avant que J2 ait pu jouer.
--

Question 2 : Trouver toutes les configurations de longueur 1.

Soit $n \geq 2$. Une configuration est de longueur 1 si, en un coup, on peut obtenir la configuration $[1, 1, \dots, 1]$ (et gagner !). On ne peut donc pas empiler deux tas (on aurait plus de 1 jeton), au contraire il faut que l'on divise un tas. Et comme on ne peut diviser qu'un tas à chaque coup, on part forcément d'une configuration du type $[m, 1, 1, \dots, 1]$ avec $2 \leq m \leq n$ (et donc $n - m$ tas de 1 jeton)

Conclusion : Pour un jeu à n jetons ($n \geq 2$) toutes les configurations de la forme $[m, 1, 1, \dots, 1]$ avec $2 \leq m \leq n$ sont de longueur 1. Il y en a $n - 1$.

Question 3 : Caractériser les valeurs de n pour lesquels le jeu à n jetons est de longueur supérieure ou égale à 2.

Une configuration de longueur supérieure ou égale à 2 donne, à un moment, une configuration de longueur 1.

Une configuration de longueur 2 est forcément perdante, donc le joueur qui la joue ne peut faire autrement que de mettre l'autre dans une position gagnante, c'est-à-dire $[m, 1, 1, \dots, 1]$ avec $2 \leq m \leq n$. Pour obtenir cette configuration il faut avoir $[m, q]$ à l'étape précédente, avec m et q premiers (sinon le joueur pourrait diviser un des tas en plusieurs tas de plus de 1 jeton)

remarque: $[p, q, 1, 1, \dots, 1]$ avec $p + q = m$ n'amène pas forcément (à coup sûr) sur $[m, 1, 1, \dots, 1]$, car le joueur aura peut-être intérêt à empiler une pile de 1 jeton avec celle de p ou celle de q jetons.

Conclusion : Une configuration est de longueur 2 si elle est de la forme $[m, q]$ avec m et q premiers et $n = m + q$

- Nous avons remarqué que si n était pair (et pas égal à 2, mais ce cas a été traité dans la question 1 : $L(2)=1$), il semble qu'on arrive toujours à trouver deux nombres premiers dont la somme est égale à n . On nous a dit après que c'était une conjecture encore non démontrée : la conjecture de Goldbach.

Donc si n est pair, il possède au moins une configuration de longueur 2, donc la longueur d'un jeu à n jetons avec n pair supérieur à 3 est supérieure ou égale à 2.

- Nous avons ensuite essayé avec n impair. Là, nous avons vu que ce n'était pas toujours possible. Par exemple : $11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6$, il n'y a pas de couple de nombres premiers dont la somme soit 11.

En faisant cela, nous avons vu que, puisque n était impair, il devait forcément être la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair (la somme de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs est pair). Or tous les nombres premiers sont impairs sauf un : 2. Autrement dit tous les nombres premiers sont impairs sauf 2.

Donc un nombre n impair ne peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers que si $n - 2$ est premier. (ce qui explique le problème avec 11 car $11-2=9$ qui n'est pas premier)

Conclusion : Les jeux à n jetons avec n pair ou $n-2$ premier possèdent des configurations de longueur 2, donc la longueur de tels jeux est supérieure ou égale à 2

Cas particulier des jeux avec n tel que n impair et $n - 2$ non premier:

- la configuration $[1, 1, 1, 1, \dots, 1]$ (n tas de 1) est de longueur 0
- la configuration $[k, 1, 1, 1, \dots, 1]$ ($n - k$ tas de 1 et un tas de k) est de longueur 1

Nous avons vu qu'il n'y a pas de configuration de longueur 2 (si on fait deux tas, c'est une configuration perdante pour l'autre s'il étale un tas, donc il va diviser un des deux tas et c'est toujours possible puisque n n'est pas égal à la somme de deux nombres premiers).

Comme il n'y a pas de configuration de longueur 2 et qu'il semble "difficile" de passer de 3 à 1 sans passer par 2, toutes les configurations qui ne sont pas du type $[1, 1, 1, 1, \dots, 1]$ ou $[k, 1, 1, 1, \dots, 1]$ sont de longueur infinie.

Conclusion : La longueur d'un jeu étant la plus grande longueur parmi les configurations de longueur finie, la longueur d'un jeu à n jetons, avec n impair et $n - 2$ non premier, est 1.

Ils faisaient donc partie des réponses à la question 2...